I. megoldás. I. Ha létezik további egész számnégyes a szóban forgó tulajdonsággal, akkor annak tagjai rendre ugyanannyival különböznek a 3, 4, 5, 6 számnégyes tagjaitól, mondjuk x-szel, ahol x pozitív vagy negatív egész szám. Eszerint x-re fennáll a

$$(3+x)^3+(4+x)^3+(5+x)^3=(6+x)^3$$

egyenlőség. Innen kifejtéssel, és a szokásos rendezési lépésekkel x-re a következő egyenletet kapjuk:

$$x^3+9x^2+21x=x(x^2+9x+21)=0.$$

Ennek egyik gyöke $x=0$, számunkra semmitmondó, további két gyökére pedig

$$x^2+9x+21=0.$$

Ezt azonban valós szám nem elégíti ki, mert diszkriminánsa negatív: -3. Nincs tehát megfelelő x szám, ezért valóban nincs további egész számnégyes a kérdéses tulajdonsággal.

II. Ha létezik egész számötös a kérdéses tulajdonsággal, akkor legkisebb tagját y-nal jelölve fennáll:

$$y^3+(y+1)^3+(y+2)^3+(y+3)^3=(y+4)^3.$$

Innen alkalmas rendezéssel

$$3(y^3+2y^2-2y)=28$$

adódik, ez pedig lehetetlen, mert a zárójelben egész szám áll, így a bal oldal osztható 3-mal, a jobb oldal viszont nem. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Berkes István (Budapest, Fazekas M. gyak. g. I. o. t.)

II. megoldás a feladat II. részére. Elég a köbszámok 3-mal való osztásánál fellépő maradékokat tekintenünk. Egy egész szám és a köbe ugyanazt a maradékot adja 3-mal osztva. Valóban, a különbségük osztható 3-mal, mert ha n a szám, akkor $n^3-n=n(n^2-1)=(n-1)n(n+1)$, három egymás utáni szám szorzata, így valamelyik tényező és vele együtt a szorzat is osztható 3-mal.

Három egymás utáni szám köbe a mondottak szerint maradékul a 0, 1, 2 számokat adja, valamilyen sorrendben, s így összegük osztható 3-mal. Az utánuk következő és az azutáni szám köbének osztási maradéka viszont 1-gyel különbözik, s így négy egymás utáni egész szám köbének összege nem lehet egyenlő a következő ötödik egész köbével.

Deák István (Budapest, Vörösmarty M. g. III. o. t.)