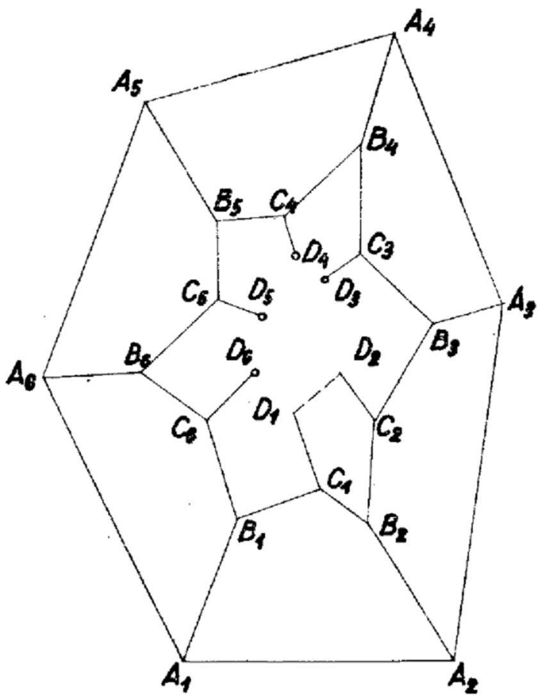
Az 1175. feladatban[1] beláttuk (az éleket egyrészt a lapok, másrészt a csúcsok szerint számlálva össze és felhasználva *Euler* poliéder–tételét), hogy a feladat feltételei mellett az ötszöglapok száma 12, függetlenül attól, hány hatszög határlap van.



1. ábra

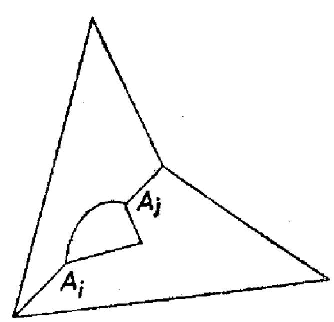
Feltéve, hogy fellép hatszög is a határlapok között, be kell látnunk, hogy fel kell lépnie legalább kettőnek. Megkísérlünk felépíteni egy 13 lapú testet 12 ötszög és egy hatszög határlappal és belátjuk, hogy ez lehetetlen. Ha megpróbálunk felvázolni egy ilyen poliédert kiindulva pl. a hatszög lapból, akkor gondolni kell arra a lehetőségre, hogy a fellépő újabb és újabb csúcsok közt lehetnek egymással, vagy egy már korábban felvett csúccsal egybeesők is.

Ilyen egybeesések kizárására sok lehetőséget nyújt az a kikötés, hogy a test minden csúcsába 3 él fut. Ennek folytán

(1) 3 összefutó él nem lehet egy síkban;

(2) ha két lapnak van közös csúcsa, ebből indul egy közös él is;

(3) bármely két közös végpontú él valamelyik határlap két szomszédos oldala is.



2. ábra

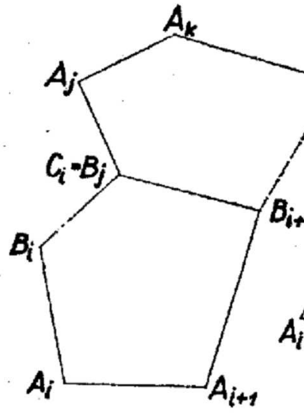
Tegyük fel, hogy léteznék a szóban forgó poliéder. Legyen $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ a hatszög lapja. Ennek mindegyik csúcsából kiindul egy A_iB_i él ($i = 1, 2, \ldots, 6$). Itt B_i (1) szerint nincs a hatszög síkjában, tehát különbözik az A_j-től, de különbözik a többi B_j-től is. Ugyanis ha két szomszédos hatszögcsúcsból induló él,[2] A_iB_i és $A_{i+1}\,B_{i+1}$ egy csúcsba futna ($B_i = B_{i+1}$ volna), akkor a keletkező $A_iA_{i+1}B_i$ háromszög határlapja volna a poliédernek, de annak nincs háromszög lapja. Két nem szomszédos hatszögcsúcsból: A_i-ből és A_j-ből induló élnek pedig azért nem lehet közös a másik végpontja, mert akkor (3) szerint a poliédernek ugyanazt a határlapját kellene határolniuk, de akkor az utóbbi határlapnak (2) szerint két közös éle is volna a hatszöggel, egy A_i-ből és egy A_j-ből induló, ami konvex poliédernél nem lehetséges.

Az A_iA_{i+1} élhez csatlakozik egy ötszög. Ennek A_i-vel, ill. A_{i+1}-gyel szomszédos csúcsa csak B_i, ill. B_{i+1} lehet, mert csak ezekből fut – hatszög csúcsokon kívül – A_i-be, ill. A_{i+1}-be él. Jelöljük az ötszög ötödik (B_i-vel és B_{i+1}-gyel szomszédos) csúcsát C_i-vel ($i = 1, 2, \ldots, 6$). Ez különbözik az ötszög többi csúcsától és a hatszög csúcsaitól is (hiszen

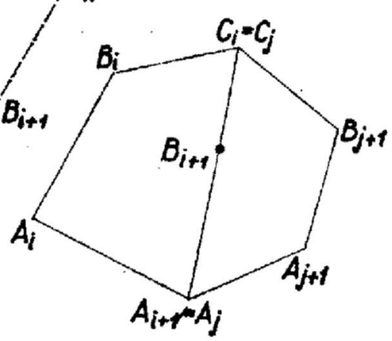
[1] K. M. L. 25 (1962/11) 134. o.

[2] Itt és a továbbiakban, ha fellép 6-nál nagyobb index, ahelyett mindig 6-tal kisebb érték értendő.

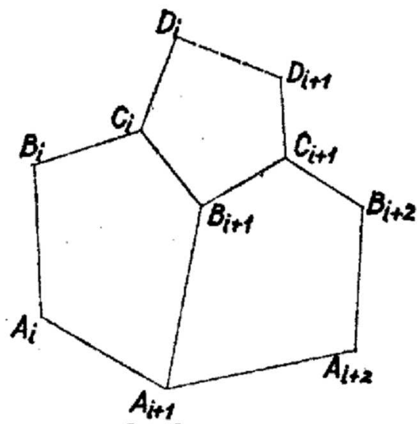
egy konvex test két határlapjának nem lehet 3 közös csúcsa). Különbözik a B_j csúcsoktól is, ezt B_i, B_{i+1}-re már láttuk. Ha C_i egy másik B_j csúccsal esne egybe, akkor össze lenne kötve az A_i-től és A_{i+1}-től különböző A_j csúccsal. Ekkor volna (3) szerint a poliédernek egy B_{i+1}, C_i, A_j-n átmenő lapja, ennek volna egy a hatszöggel közös A_jA_k éle és egy ehhez csatlakozó A_kB_k éle, mivel a szóban forgó határlap nem lehet a hatszög. Ez a határlap ötszög kell, hogy legyen, tehát B_k különbözik B_{i+1}-től és össze van vele kötve. Ez azonban lehetetlen, mert a B csúcsokból csak A- és C-csúcsba megy él.



3. ábra



4. ábra



5. ábra

Két különböző C_i, C_j csúcs sem eshet egybe, különben az $A_iB_iC_iB_{i+1}A_{i+1}$ és $A_jB_jC_jB_{j+1}A_{j+1}$ lapoknak egy C_i-ből, ill. C_j-ből induló éle egybeesne, tehát B_i, B_{i+1} egyike B_j, B_{j+1} valamelyikével azonos volna. Mivel $i \neq j$ és a B csúcsok mind különbözők, így $i = j+1$, vagy $j = i+1$ kellene hogy legyen. Ez azonban $C_i = C_j$-vel együtt azt jelentené, hogy két szomszédos határlap két egymás utáni élben érintkezne, ami nem lehetséges.

A C_i pontokból ismét ki kell indulnia még egy–egy C_iD_i élnek $(i = 1, 2, \ldots, 6)$. A D_i végpont nem eshetik egybe egyik A_j-vel sem, mert az utóbbiból csak A és B pontokba fut él, és C-be nem; D_i a B_j csúcsoktól is különbözik, mert közülük B_i-be és B_{i+1}-be fut él C_i-ből, C_iD_i pedig az ezektől különböző, C_i-ből induló él.

A D_i, C_i, B_{i+1}, C_{i+1}, D_{i+1} csúcsok ebben a sorrendben egy határlap csúcsai, ugyanis az $A_iB_iC_iB_{i+1}A_{i+1}$ laphoz a C_iB_{i+1} él mentén csatlakozó lapnak az éllel szomszédos csúcsai csak D_i, ill. C_{i+1} lehetnek. Ez tehát egyben az $A_{i+1}B_{i+1}C_{i+1}B_{i+2}A_{i+2}$ laphoz $B_{i+1}C_{i+1}$ mentén csatlakozó lap is, aminek C_{i+1}-gyel szomszédos csúcsa D_{i+1}. Mivel ez a határlap csak ötszög lehet, D_i-t él köti össze D_{i+1}-gyel.

A D_i csúcsoknak különbözniük kell a C_j csúcsoktól is, mert előbbi C_i, D_{i-1}, D_{i+1}-gyel van összekötve, utóbbi B_j, B_{j+1}, D_j-vel, és beláttuk, hogy az előbbi 3 csúcs közt nem szerepel B csúcs.

Ezzel felsoroltuk a test mind a 13 lapját, tehát a D_iD_{i+1} élek közt kell egybeesőknek lenniük úgy, hogy a test záruljon. D_i és D_{i+2} különbözők, mert két szomszédos határlap nem érintkezhet két szomszédos él mentén. D_i és D_{i+3} sem eshet egybe, mert különben a $D_iD_{i+1}D_{i+2}$ $(D_{i+3} = D_i)$ háromszög egy további határlapja volna a poliédernek. Ezzel minden lehetőséget számba vettünk, mert két D csúcs vagy szomszédos (az indexezés sorrendjében), vagy második vagy harmadik szomszéd. Beláttuk ezzel, hogy nincs olyan konvex poliéder, amelyet egy hatszög és 12 ötszög határolna.

Makai Endre (Budapest, Eötvös J. g. II. o. t.)
dolgozata, kiegészítésekkel

Megjegyzés. Két helyen hivatkoztunk a test konvex voltára: a második bekezdés végén és a harmadik elején, de mindkettő helyettesíthető volna olyan meggondolással (ha kissé hosszabb is volna), amelyik csak arra hivatkozik, hogy minden csúcsba 3 él fut. Így az állítás helyes marad, ha a poliéder konvex volta helyett csak annyit teszünk fel, hogy teljesül rá az *Euler*–tétel.

A versenyzők nem gondoltak egybeesési lehetőségekre a poliéder felépítése során egymás után felvett csúcsok között.