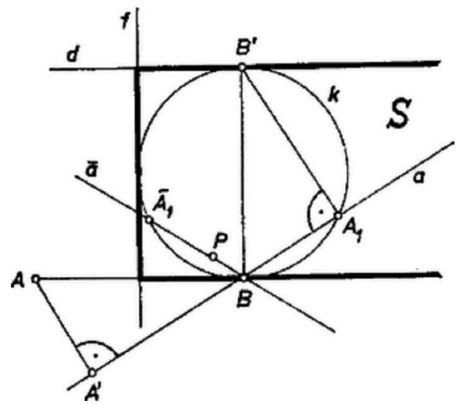
I. megoldás. Ha a egy háromszög egyik oldala, m a szemben fekvő csúcsból bocsátott magasság, akkor a háromszög területe $am/2$, az oldal fölé rajzolt négyzet területének fele $a^2/2$, tehát akkor lesz az előbbi a kisebb, ha az oldal nagyobb a rá bocsátott magasságnál.

Ez a feltétel az AB oldalra nézve akkor és csak akkor teljesül, ha C az AB egyenessel párhuzamos és tőle AB távolságra levő d és e egyenesek közti sávban van (a d és e határegyeneseket már nem számítva hozzá).



1. ábra

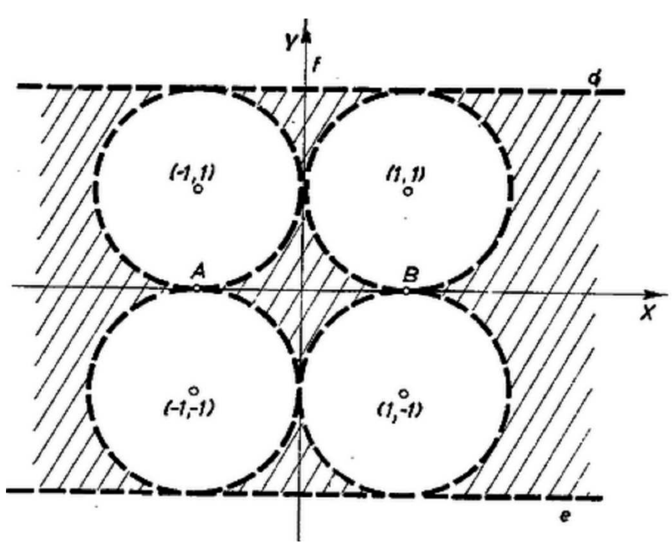
E sáv pontjai közül ki kell még zárnunk azokat a C pontokat, amelyekre az AC vagy BC oldal nem nagyobb a rá bocsátott magasságnál. Elegendő csak az AB és d közti sávot, ill. ennek is pl. azt a felét tekinteni, amelyik az AB szakasz f felező merőlegesének azon az oldalán van, mint a B pont, beleértve f-nek a sávhoz tartozó pontjait is. Egy ebben az S tartományban levő C pont és az AB-re, ill. f-re, ill. AB és f metszéspontjára vonatkozó tükörképe az A, B pontokkal egybevágó háromszögeket határoznak meg, így vagy mindegyik kielégíti a feladat feltételeit, vagy egyik sem. Így S-nek a mértani helyhez tartozó pontjai és az azokból az említett tükrözésekkel keletkező pontok együtt adják a keresett mértani helyet.

Az S-beli C pontokra $BC \leq AC$, így ha az előbbi oldal fölé emelt négyzet területének fele nagyobb, mint az ABC háromszögé, akkor az utóbbi oldal fölé emelté is. Elég tehát azokat a pontokat kizárni, amikre az előbbi feltétel nem teljesül.

Legyen a egy AB-től különböző, B-n átmenő egyenes, A' az A pont vetülete a-n. Mérjük rá B-ből a-nak a d-t tartalmazó félsíkbeli félegyenesére a $BA_1 = AA'$ szakaszt, ekkor a félegyenes S-be eső része BA_1 szakaszának pontjait (végpontjaival együtt) kell kizárnunk, mint nem a mértani helyhez tartozókat. Az $AA'B$-vel egybevágó háromszöget kapunk, ha B-ben AB-re, A_1-ben a-ra merőlegest állítunk; legyen metszéspontjuk B'. Valóban, a két háromszög derékszögű, megfelelő oldalaik merőlegesek egymásra, és az A-ból, ill. B-ből induló befogó szerkesztés szerint egyenlő. Így BB' és AB egyenlők, mint megfelelő oldalak, tehát a B' pont független az a egyenes helyzetétől (B vetülete d-n), A_1 tehát a BB' mint átmérő fölé rajzolt k körön van, BA_1 ennek a körnek egy húrja. A k körlemez minden P pontján és B-n átmegy egy a egyenes, melynek P a kizárandó BA_1 szakaszához tartozik. S-nek tehát a k körön kívüli része tartozik a mértani helyhez. Az AB egyenes S-t határoló része is hozzátartozik a B pont kivételével, ha egyenesszakasszá lapult „háromszögeket” is háromszögnek tekintünk 0 területtel.

A keresett mértani hely mostmár a d és e egyenes közti sáv azon négy körön kívüli része, amelyek érintik az AB egyenest A-ban, illetve B-ben és a sáv valamelyik határvonalát. Ezt a 2. ábra csíkozott része szemlélteti, a szaggatott vonallal meghúzott határvonalak nem tartoznak a mértani helyhez.

Tamás Endre (Budapest, I. István g. III. o. t.)



2. ábra

II. megoldás. Helyezzünk a síkra egy derékszögű koordinátarendszert úgy, hogy A koordinátái $(-1,\,0)$ legyenek, B-éi $(1,\,0)$, jelöljük továbbá egy megfelelő C pont koordinátáit $(x,\,y)$-nal. Így az ABC háromszög területe $t=|y|$, az oldalak fölé rajzolt négyzetek területének fele pedig rendre

$$\frac{AB^2}{2}=2,\quad \frac{BC^2}{2}=\frac{(x-1)^2+y^2}{2},\quad \frac{CA^2}{2}=\frac{(x+1)^2+y^2}{2}.$$

A $t<AB^2/2$ feltételt az abszolút érték jel elhagyásával kettős egyenlőtlenséggé írhatjuk át:

$$y\ge 0 \text{ esetén } 0\le |y|=y<2,\ \text{ azaz } 0\le y<2,$$
$$y<0 \text{ esetén } 0<|y|=-y<2\text{-ből } 0>y>-2,$$

összefoglalva

$$-2<y<2. \tag{1}$$

Hasonlóan a $2t<BC^2$, $2t<CA^2$ feltételekből

$$2y<(x-1)^2+y^2, \tag{2}$$
$$2y>-(x-1)^2-y^2, \tag{3}$$
$$2y<(x+1)^2+y^2, \tag{4}$$
$$2y>-(x+1)^2-y^2. \tag{5}$$

Adjunk (2) és (4) mindkét oldalához $1-2y$-t, (3) és (5) mindkét oldalához $-1-2y$-t. Ekkor teljes négyzetté kiegészítéssel, továbbá (3) és (5) esetében még (-1)-gyel szorozva

$$1<(x-1)^2+(y-1)^2, \tag{2a}$$
$$1<(x-1)^2+(y+1)^2, \tag{3a}$$
$$1<(x+1)^2+(y-1)^2, \tag{4a}$$
$$1<(x+1)^2+(y+1)^2. \tag{5a}$$

Ezek a feltételek azt fejezik ki, hogy C-nek az $(1,\,1)$, az $(1,\,-1)$, a $(-1,\,1)$ és a $(-1,\,-1)$ ponttól való távolsága nagyobb 1-nél, vagyis C az ezen pontok körül $r=1$ sugárral írt körre nézve külső pont.

Az (1) feltétel pedig azt fejezi ki, hogy C az $y=-2$ egyenes „fölött” és az $y=2$ egyenes „alatt” van, vagyis e két egyenes közti síksávban.

Antal Magdolna (Budapest, Varga K. lg. III. o. t.)