

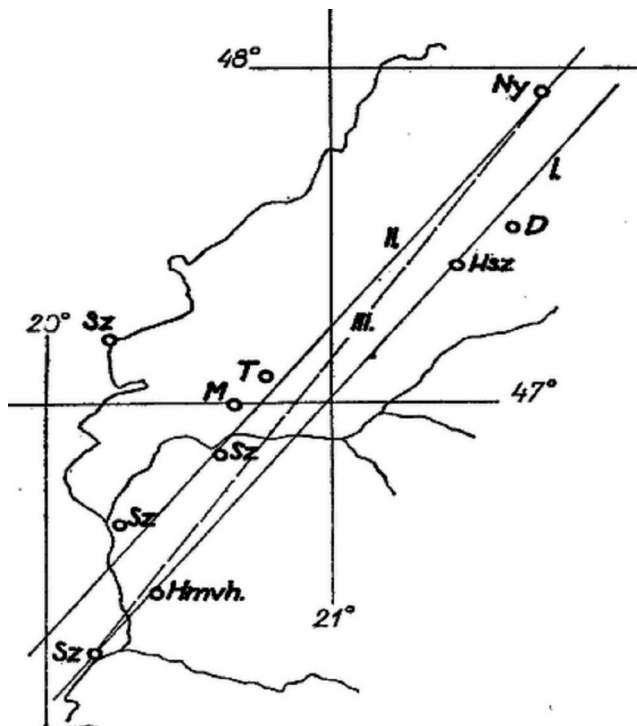
I. Az 1146. feladatban¹ (többek között) meghatároztuk a Föld azon helyeit, amelyekre a Nap dec. 21-én, ill. szept. 23-án és márc. 21-én a budapesti napkelte időpontjában merőlegesen süt. E helyek az illető időpontra meghatározzák a Nap helyzetét is, annak a Föld körüli látszólagos mozgásában. E helyeknek Budapesttől mért ϑ szögtávolsága (a földgömb hozzájuk, ill. Budapesthez húzott sugarai közti szög) 90° , ezért a $P_1(\lambda_1, \varphi_1)$ és $P_2(\lambda_2, \varphi_2)$ földrajzi koordinátájú helyek ϑ szögtávolságára az 1045. feladatban² talált

$$\cos \vartheta = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos(\lambda_1 - \lambda_2)$$

összefüggésben a bal oldal értéke 0, és így osztással

$$\cos(\lambda_1 - \lambda_2) = -\operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2.$$

Ebben P_1 -nek Budapestet vettük, P_2 -nek a keresett helyet, amelyre ismertük a φ_2 földrajzi szélességet abból, hogy a kérdéses napokon a Nap a Baktérítő, ill. az Egyenlítő fölött halad, és így $\varphi_2 \approx -23,5^\circ$, illetve 0° .



Budapest helyén előbb Szegedet (a térkép szerint $\lambda'_1 \approx 20^\circ 10'$, $\varphi'_1 = 46^\circ 15'$), a hozzá tartozó P'_2 -ben pedig ismét $\varphi'_1 = -23,5^\circ$ -ot véve, azaz dec. 21-re számolva

$$\begin{aligned} \cos(\lambda'_1 - \lambda'_2) &\approx 1,044 \cdot 0,4348 \approx 0,4542, \\ \lambda'_1 - \lambda'_2 &\approx \pm 62^\circ 59', \end{aligned}$$

és mivel P'_2 -t kelet felé keressük:

$$\lambda'_2 \approx \lambda'_1 + 62^\circ 59' \approx 83^\circ 9'.$$

Hasonlóan Nyíregyházához ($\lambda''_1 \approx 21^\circ 45'$, $\varphi''_1 \approx 47^\circ 58'$)

$$\lambda''_1 - \lambda''_2 = \pm 61^\circ 10', \quad \lambda''_2 \approx 82^\circ 55'.$$

Mivel $\lambda''_2 < \lambda'_2$, azért P''_2 nyugatra van P'_2 -től, föléje a Nap kissé később érkezik, tehát dec. 21-én Nyíregyházán valóban később kel a Nap (a különbség 14 szögperc $\approx 0,24^\circ$, ekkora elfordulás kb. 1 időperc alatt következik be, ennyi a késés).

Szept. 23-ra és márc. 21-re $\varphi_2 = 0$, így $\lambda_2 = \lambda_1 + 90^\circ$, és mivel Nyíregyháza nagyobb keleti hosszúságon fekszik, e napokon Nyíregyházán kel előbb a Nap, kb. 6,4 időperccel. Feltehető, hogy az eltérés folytonosan csökken le, ill. a másik irányban folytonosan növekszik fel, így van dec. 21. előtt, és utána is, egy-egy dátum, amelyen Szegeden és Nyíregyházán egyszerre kel a Nap. E két dátum között van a kérdéses környezet.

E napokat pontosan meghatározhatjuk. Jelölje φ_2^* azt a földrajzi szélességet, amelyre a kérdéses napon a Nap a zenitben jár, a megfelelő hosszúságot pedig λ_2^* . E napokra $\cos(\lambda'_1 - \lambda_2^*) = -\operatorname{tg} \varphi'_1 \operatorname{tg} \varphi_2^*$ és $\cos(\lambda''_1 - \lambda_2^*) = -\operatorname{tg} \varphi''_1 \operatorname{tg} \varphi_2^*$.

¹K. M. L. 25 (1962/11) 108. o.

²K. M. L. 22 (1961/4) 157. o.

Osztással kiküszöbölhetjük φ_2^* -ot:

$$\frac{\cos(\lambda_1' - \lambda_2^*)}{\cos(\lambda_1'' - \lambda_2^*)} = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1'}{\operatorname{tg} \varphi_1''}$$

A különbségek koszinuszát kifejtve az addíció tétel alapján minden tagban fellép λ_2^* -nak vagy a szinusza, vagy a koszinusza. Így összevonásokkal és osztással

$$\operatorname{tg} \lambda_2^* = \frac{\sin \lambda_2^*}{\cos \lambda_2^*} = \frac{\cos \lambda_1'' \operatorname{tg} \varphi_1' - \cos \lambda_1' \operatorname{tg} \varphi_1''}{\sin \lambda_1' \operatorname{tg} \varphi_1'' - \sin \lambda_1'' \operatorname{tg} \varphi_1'}$$

adatainkkal $\lambda_2^* \approx 86^\circ 15'$, és evvel $\varphi_2^* \approx -21^\circ 12'$. Ugyanennyi e napon a Nap ún. csillagászati deklinációja (egyik égi koordinátája). Ebből csillagászati táblázatok alapján a kérdéses időköz kb. november végétől január közepéig tart.

II. Kézenfekvő, hogy a második kérdésre is igen a válasz, éspedig a nyári napforduló egy bizonyos környezetében a Nap Szegeden előbb nyugszik le, mint Nyíregyházán. Valóban, ekkor $\varphi_2 = 23,5^\circ$, és így fenti számításainkból pusztán előjelváltással a Ráktérítőnek az a pontja, amely fölött a Nap a szegedi napnyugta pillanatában áll, $180^\circ - 62^\circ 59' = 117^\circ 01'$ -cel van Szegedtől nyugatra, tehát nyugati hosszúsága $96^\circ 51'$. Nyíregyházára nézve pedig $180^\circ - 61^\circ 10' - 21^\circ 45' = 97^\circ 05'$ a megfelelő hosszúság. Az utóbbi nyugatra van az előbbtől, oda a Nap később érkezik (ismét kb. 1 időperccel), tehát Nyíregyházán valóban később nyugszik le, mint Szegeden.

Érdi Bálint (Esztergom, I. István g. IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. Felhasználva azt, hogy a Nap dec. 21-én a szegedi napkelte pillanatában a Földnek $P(\lambda = 83^\circ 9', \varphi = -23^\circ 30')$ pontja fölött áll, kérdezhetjük, mennyire van Nyíregyháza P -tól. Elég a ϑ szögtávolság koszinuszának előjelét meghatároznunk. Ha ez negatív, akkor $\vartheta > 90^\circ$, a Nap Nyíregyházáról még nem látható. Valóban

$$\begin{aligned} \cos \vartheta &= \sin 47^\circ 58' \cdot \sin(-23^\circ 30') + \\ &+ \cos 47^\circ 58' \cdot \cos(-23^\circ 30') \cdot \cos(21^\circ 45' - 83^\circ 9') = -0,2962 + 0,2939 < 0. \end{aligned}$$

Ezzel a számítással azonban nem kapjuk meg a késés értékét.

2. Az ábra I és II vonala a térkép azon pontjain megy át, ahol a Nap dec. 21-én Szegeddel, ill. Nyíregyházával egyidejűen kel és jún. 21-én egyidejűen nyugszik; a III vonal pontjaiban pedig nov. 29-én, jan. 15-én egyidejű a napkelte, máj. 28-án és júl. 17-én egyidejű a napnyugta (az utóbbi időszak hosszabb, mert azidőtájt a Föld lassabban haladt a pályáján).