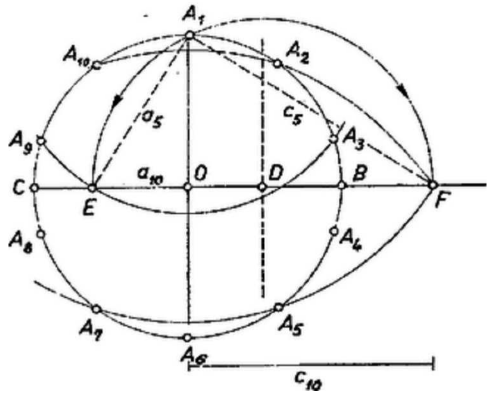
I. Az adott r sugarú körbe először egy $A_1\,A_2\,A_3\dots A_9\,A_{10} = T_k$ közönséges (konvex) szabályos tízszöget szerkesztünk. Ebből a T_c szabályos csillagtízszöget úgy kapjuk, hogy a csúcsokat $A_1A_4A_7A_{10}A_3A_6A_9A_2A_5A_8$ sorrendben kötjük össze.



1. ábra

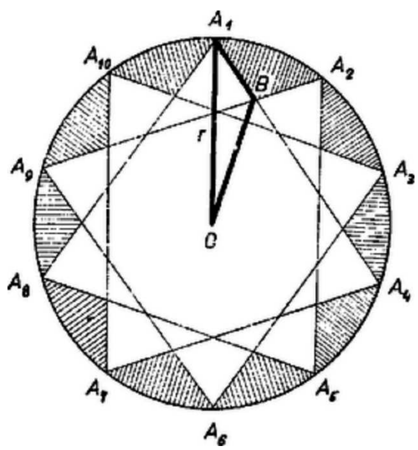
T_K-t az 1157. feladatban [1] nyert

$$\sin 18^\circ = \cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

eredmény felhasználásával szerkeszthetjük meg (1. ábra). Ugyanis az r sugarú körbe írt (konvex) szabályos n-szög oldalának ismert képletével

$$a_{10} = 2r\sin\frac{180^\circ}{10} = r\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \sqrt{\frac{5r^2}{4}} - \frac{r}{2} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2} - \frac{r}{2},$$

vagyis az r és $r/2$ befogókkal szerkesztett derékszögű háromszög átfogójából kivonva az $r/2$ befogót, a különbség a_{10}.



2. ábra

II. Legyen a kör középpontja O, az A_1A_4 és A_9A_2 oldalak metszéspontja B (2. ábra). Ekkor a kör T_c-vel lefedett része 20-szorosa az OA_1B háromszög területének. Ennek $OA_1 = r$ oldalán levő szögei 18° és 36°, és így a lefedett terület

$$20\frac{r^2\sin\,18^\circ\sin\,36^\circ}{2\,\sin\,(18^\circ+36^\circ)} = \frac{20\,r^2\sin^2\,18^\circ\cos\,18^\circ}{\sin\,54^\circ} = \frac{5(\sqrt{5}-1)^2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4(\sqrt{5}+1)}r^2 =$$
$$= \frac{5}{16}(\sqrt{5}-1)^3\sqrt{10+2\sqrt{5}}r^2 = \frac{5}{2}(\sqrt{5}-2)\sqrt{10+2\sqrt{5}}r^2 =$$
$$= \frac{5}{2}\sqrt{50-22\sqrt{5}}\,r^2.$$

Felhasználtuk az 1157. feladatból a következőket is:

$$\sin\,72^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}, \qquad \cos\,36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

[1] K. M. L. 24 (1962/11) 118. o.

Ebből a kör le nem fedett részének területe:

$$r^2\left(\pi-\frac{5}{2}\sqrt{50-22\sqrt{5}}\right)\approx 0{,}896\,r^2.$$

Magyar Gábor (Sopron, Berzsenyi D. g. III.o. t.)

Megjegyzések. **1**. A szabályos csillagtízszög c_{10} oldala az a_{10}-éhez hasonló egyszerűséggel szerkeszthető:

$$c_{10}=2r\,\sin 3\cdot 18^\circ-2r\,\cos 36^\circ=\frac{\sqrt{5}+1}{2}r,$$

tehát a fenti szerkesztésben az $r/2$ befogót hozzáadjuk az átfogóhoz. Ezt a több dolgozatban idézett klasszikus, ún. *Ptolemaiosz–Dürer*-féle szerkesztésben ugyanazzal a körívvel kaphatjuk, mint a_{10}-et (1. ábra). Ebben a mondott derékszögű háromszög befogói az OA_1 sugár és a rá merőleges OB sugár OD fele, a_{10} pedig az OE szakasz, ahol E-t a D körül DA_1 sugárral írt körív metszi ki a BC átmérőből. (Vagyis a fent említett kivonást úgy hajtjuk végre, hogy az átfogó végpontját ráfordítjuk az $r/2$ befogó O-n túli meghosszabbítására.) Mármost $c_{10}=OF$, ahol F a mondott körívnek a BC egyenessel való második metszéspontja (az átfogót OD másik meghosszabbítására mérjük rá).

Többen ezt az ábrát úgy használták fel, hogy a körbe $A_1E=a_5$ oldallal $A_1A_3A_5A_7A_9$ szabályos ötszöget szerkesztettek, és ennek oldalait megfelezve kapták T_k-t, vagy pedig eljárásukat az A_1A_6 átmérő másik végpontjából kiindulva megismételték. Ez helyes eljárás – úgy látszik, ismertebb az OE szakasz használatánál –, viszont a_{10} szerkesztésén alapszik, továbbá az $a_5^2=a_{10}^2+r^2$ összefüggésnek számítással való bizonyításán, tehát elvileg bonyolultabb amannál. Ha ötszöget kívánunk a körbe beírni, természetesen azt használjuk.

Megemlítjük még, hogy hasonló bizonyítás szerint $c_5^2=c_{10}^2+r^2$, vagyis az A_1F szakasz a körünkbe írható szabályos csillagötszög oldalával egyenlő (más szóval a közönséges ötszög átlójával).

2. Többen a feladat számítási részében a szemlélet alapján ezt írták: „a keresett területet a kör és a csillagötszög területének különbsége adja”. A „T_c területe” kifejezés itt nem szerencsés. A csillag tíz szög hurkolt idom. Hurkolt négyszög területének célszerű és a matematikában elfogadott értelmezését nemrég láttuk.[2/] A hurkolt sokszögek területének értelmezése hasonló, de bonyolultabb, ugyancsak a részháromszögek körüljárási irányát használja fel.

[2/] *Lőrincz Pál:* Az 1962. évi Arany Dániel tanulóversenyek II. fordulóján kitűzött feladatok megoldása, K. M. L. 26 (1963/1) 10–17. o., közelebbről 13–14. o.