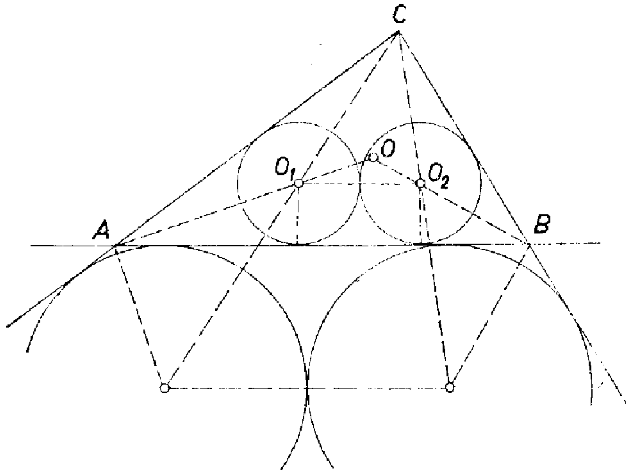
A két érintkező kör sokféleképpen helyezkedhet el a háromszöghöz képest, és sokféleképpen választhatjuk meg a háromszöget meghatározó adatokat is. Oldjuk meg először a feladatot abban a legkézenfekvőbb esetben, ha mindkét kör a háromszög belsejében van (1. ábra), sugaruk r, és érintik az $AB = c$ oldalt. A T_1, T_2 érintési pontokkal 3 részre osztott oldalból

(1)
$$r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + 2r + r \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} = c, \qquad r = \frac{c}{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + 2}.$$



1. ábra

Az AO_1 és BO_2 egyenesek a beírt kör O középpontjában metszik egymást, és hasonlóan számíthatjuk a beírt kör ϱ sugarát, a nyert kifejezés alapján pedig a fenti nevező első két tagjának összegét:

(2)
$$\varrho = \frac{c}{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}}, \quad \text{és így} \quad r = \frac{c}{\frac{c}{\varrho} + 2} = \frac{c\varrho}{c + 2\varrho}.$$

r utóbbi kifejezését abból is megkaphatjuk, hogy az ABO háromszög területét felírjuk mint az ABO_2O_1, trapéz és az O_1O_2O háromszög területének összegét: a trapéz magassága r, és $O_1O_2 = 2r$.

Írható (2) a következő tetszetős alakban is:

$$\frac{1}{r} = \frac{c + 2\varrho}{c\varrho} = \frac{1}{\varrho} + \frac{2}{c}.$$

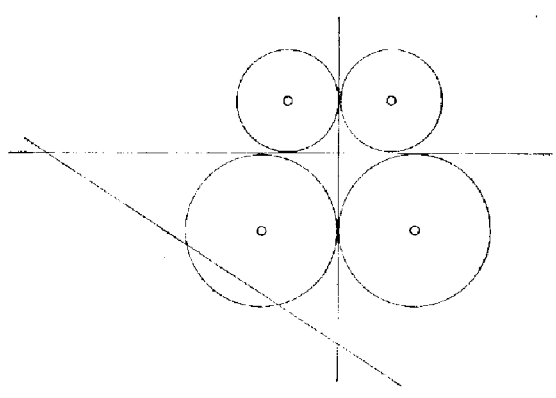
Innen látjuk, hogy a körpár ilyen típusú beírása esetén akkor kapunk legnagyobb sugarat, ha a körök közös érintőjének a leghosszabb oldalt választjuk, viszont a legrövidebb oldalt érintő körpár sugara a legkisebb.

(2)-t s-sel (a fél kerülettel) bővítve és $2\varrho s = 2t = cm_c$ figyelembevételével

$$r = \frac{ct}{cs + 2t} = \frac{t}{s + m_c} = \frac{c\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}}{c\sqrt{s} + 2\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

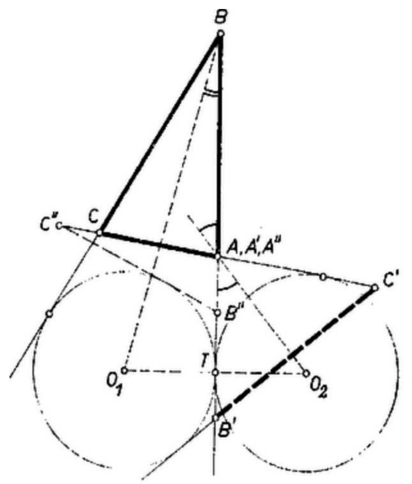
(kisebb magassághoz nagyobb r, és természetesen nagyobb alap tartozik). Az utolsó kifejezés r-et kizárólag az oldalak függvényeként állítja elő.

Bemutatjuk a két kör néhány különböző elhelyezkedését anélkül, hogy teljes felsorolást adnánk.



2. ábra

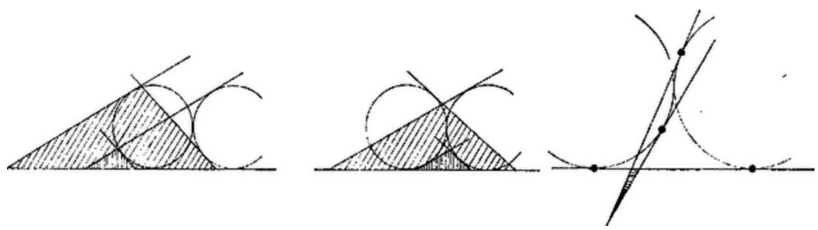
A két körnek a háromszög oldalain 4 érintési pontja kell hogy legyen (legalább), ezek közül legalább 2-nek egy oldalon kell lennie (ezek egybe is eshetnek), vagyis a háromszög egyik oldala a két kör közös érintője. Ez lehet az érintkezési pontjukban húzott érintő, és lehet egy külső közös érintő. Lehetséges az is, hogy mindkettő szerepeljen az oldalak között. Ekkor derékszögű a háromszög, és az átfogója tetszés szerinti egyenes lehet, vagy ha a derékszögű háromszögből indulunk ki, ahhoz tetszés szerinti nagyságú körpár írható úgy, hogy mindkettő érintse mindkét befogó egyenesét (az egyik érintheti emellett az átfogó egyenesét is, 2. ábra).



3. ábra

A közös belső érintő mellett a másik két oldalt alkothatja a körök egy–egy további érintője (3. ábra). A körök eshetnek a háromszög valamelyik szögtartományába, egy ilyen szög csúcsszögének a tartományába, vagy a háromszög egy külső szögének a tartományába. A 3. ábra ABC háromszögének adataiból meghatározzuk alább a körök r sugarát. A szaggatott vonalak további lehetséges érintőket mutatnak. Ezek az ABC háromszög két-két megfelelő oldalegyenesével ismét egy–egy olyan háromszöget alkotnak, melynek az adott körök 2–2 oldalát érintik.

Ha a háromszög egyik oldala a két kör közös külső érintője, akkor is eshetnek a körök a háromszöghöz képest különböző tartományokba. Az 1. ábra feltüntet a beírt körpáron kívül még egy körpárt. Néhány további példát a 4. ábra mutat.


4. ábra

Az olvasóra bízzuk az összes lehetséges esetek felkutatását. Ezekre r a fentiekhez hasonlóan határozható meg és (1)-hez hasonló kifejezések adódnak azzal, hogy a nevezőben ctg helyett tg léphet fel és az előjelek változhatnak, – a harmadik tagé is.

Térjünk most vissza a 3. ábra esetére. Itt

$$BA + AT = BT, \quad c + r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = r\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}, \quad \text{és innen} \quad r = \frac{c}{\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} - \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}.$$

Lényeges különbség (1)-hez képest a nevezőben a 2-es tag hiánya.

Fejéregyházi Sándor (Budapest, I. István g., IV. o. t.)