A jobb oldalak egymással megegyező kiírt tört része megegyezik a 8/9 tört 0,888 888 ... végtelen (szakaszos) tizedes tört kifejtése első három jegyével is. Az egész részek pedig lépésenként 9-cel nőnek, 1-gyel kisebbek 9 egymás utáni többszöröseinél. Ezek szerint a jobb oldalak kiírt számjegyei három tizedes jegyre lekerekített értékei a

$$8+\frac{8}{9}=(9-1)+\frac{8}{9}=9-\frac{1}{9},\quad 2\cdot 9-\frac{1}{9},\quad 3\cdot 9-\frac{1}{9},\quad 4\cdot 9-\frac{1}{9}$$

számoknak. Ezek közös alakja

$$9k-\frac{1}{9},\qquad \text{ahol}\quad k=1,\ 2,\ 3,\ 4, \tag{1}$$

négyzetük közös alakja pedig

$$81k^2-2k+\frac{1}{81}.$$

Ezt ugyancsak lekerekítve – éspedig egészre –, $81k^2-2k$ adódik, és ez a kifejezés $k=1,\ 2,\ 3,\ 4$-re éppen a gyökjel alatti 79, 320, 723, 1288 számokat adja.

Vizsgáljuk meg, hogy a $81k^2-2k$ kifejezéssel $k=5,\ 6,\ 7,\ \ldots$ mellett adódó természetes számok négyzetgyökében az első három tizedes jegy ugyancsak 8-as-e, vagyis hogy fennáll-e minden $k\geq 1$ egész számra a következő kettős egyenlőtlenség:

$$(9k-1)+0{,}888<\sqrt{81k^2-2k}<(9k-1)+0{,}889. \tag{2}$$

A második egyenlőtlenség helyessége nyilvánvaló, hiszen a fentieket felhasználva

$$\begin{aligned}\sqrt{81k^2-2k}<\sqrt{81k^2-2k+\frac{1}{81}}=9k-\frac{1}{9}=(9k-1)+\frac{8}{9}=\\ =(9k-1)+0{,}888\,888\ldots<(9k-1)+0{,}889.\end{aligned} \tag{3}$$

(2) bal oldalán ugyancsak pozitív számokról van szó, ezért elég megmutatni a négyzetre emeléssel adódó egyenlőtlenség helyes voltát. A balról álló kifejezés négyzete így írható:

$$\begin{aligned}(9k-0{,}112)^2=81k^2-2{,}016k+0{,}012\,544=(81k^2-2k)-\\ -(0{,}016k-0{,}012\,544).\end{aligned}$$

Itt az utolsó zárójeles kifejezés pozitív, ha $k\geq 1$, tehát

$$(9k-0{,}112)^2<81k^2-2k,$$

(2) első része is helyes. Ezzel beláttuk, hogy ha k természetes szám, akkor a $81k^2-2k$ (ugyancsak természetes) szám négyzetgyökében az első három tizedes jegy 8-as. k végtelen sok értéket vehet fel, tehát kérdésünk első részére a válasz igenlő.

A 0,111 szám az 1/9 tört lekerekített közelítő értéke. Ebből azt várhatjuk – (1)-hez hasonlóan –, hogy a

$$\left(9k+\frac{1}{9}\right)^2=81k^2+2k+\frac{1}{81}$$

számok lekerekített értéke meg fog felelni a követelménynek. A $81k^2+2k$ kifejezésből a $k=1,\ 2$ és 3 értékekkel

$$\sqrt{83}=9{,}110\,4\ldots,\qquad \sqrt{328}=18{,}110\,8\ldots,\qquad \sqrt{735}=27{,}110\,9\ldots,$$

ezekben csak két 1-es jegy adódik, de a tört rész növekszik, várható tehát, hogy a 0 ezredrész helyére k növekedésével 1 ezredrész lép. Kérdezzük tehát, hogy teljesül-e és ha igen, mely pozitív k értékekre a

$$(9k+0{,}111)^2<81k^2+2k$$

egyenlőtlenség. A jobb és bal oldal különbsége

$$0{,}002k-0{,}012\,321$$

pozitív, ha $k>6{,}1605$. Eszerint kérdésünk második részére is igen a válasz, mert végtelen sok 6-nál nagyobb természetes szám van. (3)-hoz hasonlóan belátható, hogy ezek mellett $81k^2+2k$ négyzetgyökében a tizedes jegyeket 111 kezdi és az első jegy, amely nem 1-es, 0.

Illés László (Hatvan, Bajza J. g. IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. Két vizsgálatunkat egybefoglalva mondhatjuk, hogy $81k^2+2k$ négyzetgyökének a legközelebbi egész számtól való eltérése (azaz különbségük abszolút értéke) a $k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ értékek kivételével minden egész k-ra a 0,111 és 0,112 számok közé esik; a gyök pozitív k esetén fölfelé, negatívokra lefelé tér el ilyen mértékben a legközelebbi egész számtól.

2. A fentiekben nem adtuk meg az összes olyan számokat, melyek első 3 tizedes jegye 8-as, illetve 1-es. Ha n olyan pozitív egész szám, hogy $(n+0{,}888)^2$ és $(n+0{,}889)^2$ között van egész szám – jelöljük N-nel –, akkor annak négyzetgyöke: $n{,}888\ldots$ alakú. N létezéséhez elegendő n-et úgy választani, hogy a $D=(n+0{,}889)^2-(n+0{,}888)^2=0{,}001(2n+1{,}777)$ különbség nagyobb legyen 1-nél, tehát $n>499$ megfelelő.

3. Hasonlóan bizonyítható, hogy olyan természetes szám is végtelen sok van, melyek négyzetgyökében az első s tizedes jegy egyezik az előre megadott $j_1, j_2, \ldots, j_s$ jegyekkel.

Lehel Jenő (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. IV. o. t.)