

Fejezzük ki (1) és (2)-ből x -et és y -t a , b , c , és z -vel. Az x -re és y -ra így adódó kifejezéseket (3)-ba helyettesítve a keletkező egyenletet megoldjuk z -re. (1)-et b -vel, (2)-t $(a - b)$ -vel szorozva, kivonással y kiesik:

$$(4) \quad [ab + (a - b)^2]x = b[a^2 + (b - c)^2] + (b - a)[b^2 + (c - a)^2] + (2bc - ac - b^2)z;$$

(1)-et $(a - b)$ -vel, (2)-t a -val szorozva és összeadva x kiesik:

$$(5) \quad [(a - b)^2 + ab]y = (a - b)[a^2 + (b - c)^2] + a[b^2 + (c - a)^2] + (2ac - a^2 - bc)z.$$

Szorozzuk mostmár (3)-at $[ab + (a - b)^2] = (a^2 - ab + b^2)$ -nel és a bal oldal első két szorzatába írjuk be (4) és (5) jobb oldalát. Az így adódó, z -re elsőfokú egyenlet rendezése és összevonás után z együtthatója a bal oldalon

$$(6) \quad E = (c - a)(2bc - ac - b^2) + (c - b)(2ac - a^2 - bc) + [ab + (a - b)^2]z = a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b - 5abc.$$

A z -t nem tartalmazó tagokat a jobb oldalra gyűjtjük. Vegyük észre, hogy (1)–(3) jobb oldalai kifejtés után, $a^2 + b^2 + c^2 = S$ jelöléssel így írhatók

$$S - 2bc, \quad S - 2ac, \quad S - 2ab.$$

Válasszuk külön ezért a jobb oldalnak S -et tartalmazó tagjait. S szorzója:

$$[ab + (a - b)^2] - (c - a)[b + (b - a)] - (c - b)[(a - b) + a] = 3ab - ac - bc.$$

A többi tagokból álló polinomot rendezzük c csökkenő hatványai szerint:

$$T = -2ab[ab + (a - b)^2] + 2bc[b(c - a) + (a - b)(c - b)] + 2ac[(b - a)(c - a) + a(c - b)] = 4abc^2 + (2a^3 - 4a^2b - 4ab^2 + 2b^3)c - 2ab(a^2 - ab + b^2).$$

Ezek szerint az egész jobb oldal, c szerint rendezve

$$J = S(3ab - ac - bc) + T = -(a + b)c^3 + 7abc^2 + (a^3 - 5a^2b - 5ab^2 + b^3)c + ab(a^2 + 2ab + b^2).$$

Így az $Ez = J$ egyenletből $z = J/E$. A két polinom osztása céljára E -t is c hatványai szerint rendezzük:

$$E = (a + b)c^2 + (a^2 - 5ab + b^2)c + ab(a + b), \quad \text{így} \\ z = -c + a + b.$$

Ezt a kifejezést (4)-be és (5)-be helyettesítve x -re, ill. y -ra kapunk elsőfokú egyenletet. (4) jobb oldalát célszerű a hatványai szerint rendezni:

$$[b + (b - a)]S - 2b^2c - 2ac(b - a) + (2bc - ac - b^2)(a + b - c) = -a^3 + (2b + c)a^2 - (2b^2 + bc)a + (b^3 + b^2c).$$

Ezt az $ab + (a - b)^2 = a^2 - ab + b^2$ együtthatóval osztva

$$x = -a + b + c,$$

és hasonlóan

$$y = -b + a + c.$$

Ezek szerint, ha egyik kifejezés sem tűnik el, amivel osztottunk, akkor az egyenletrendszer megoldása csak a következő lehet:

$$(7) \quad x = b + c - a, \quad y = c + a - b, \quad z = a + b - c.$$

A behelyettesítés mutatja, hogy e kifejezések a rendszert minden esetben kielégítik.

Megadunk az a , b , c értékhármasokra egy elegendő feltételt, melynek teljesülése esetén (7) az adott rendszernek egyetlen megoldása.

Az x és y meghatározásánál fellépő osztó:

$$a^2 - ab + b^2 = \left(a - \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2$$

pozitív, kivéve ha $b = 0$ és $a = b/2 = 0$. Utóbbi esetben az egyenletrendszer határozatlanná válik. (Belőle $z = -c$, $x + y = c$ adódik, ha $c \neq 0$, ha pedig c is 0, akkor három $0 = 0$ egyenlet, amely nem tartalmazza az ismeretleneket, és így minden x, y, z értékhármast mellett teljesül.) Hasonló a helyzet, ha a, b, c közül bármelyik másik kettő lesz 0. Ha viszont a három paraméter közül legfeljebb egyik 0, akkor x és y egyértelműen van meghatározva, feltéve, hogy z egyértelmű, ami viszont fennáll, ha a (6) alatti E kifejezés nem 0.

Anélkül, hogy megkeresnénk az összes olyan a, b, c számhármast, amelyre $E \neq 0$, megmutatjuk, hogy ez mindig teljesül, ha a, b, c nem negatívok és legfeljebb egyikük 0. Valóban

$$\begin{aligned} E &= a^2b + a^2c + ab^2 + ac^2 + b^2c + bc^2 - 5abc = \\ &= a^2c - 2abc + b^2c + ab^2 - 2abc + ac^2 + a^2b - 2abc + bc^2 + abc = \\ &= (a - b)^2c + (b - c)^2a + (c - a)^2b + abc, \end{aligned}$$

itt egyik tag som negatív, ha a, b, c nem negatív, és ha mindhárom szám pozitív, akkor a kifejezés utolsó tagja pozitív, ha pedig pl. $c = 0$, de $a \neq 0, b \neq 0$, akkor a második és harmadik tag pozitív.

Csirik János (Orosháza, Tánicsics M. g. III. o. t.)
dolgozatából, kiegészítéssel