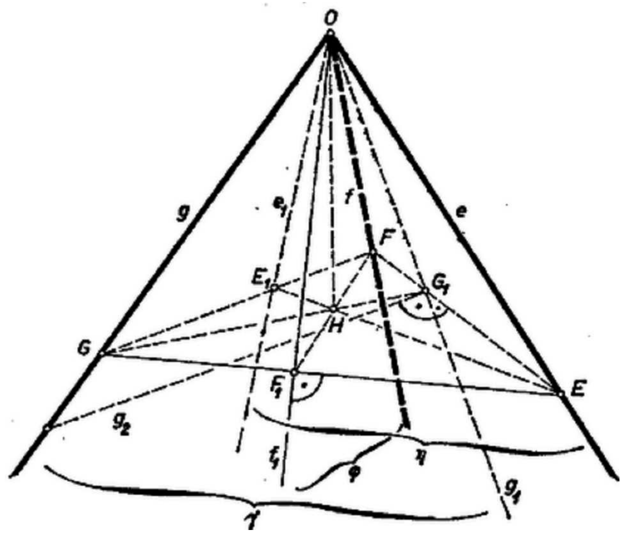
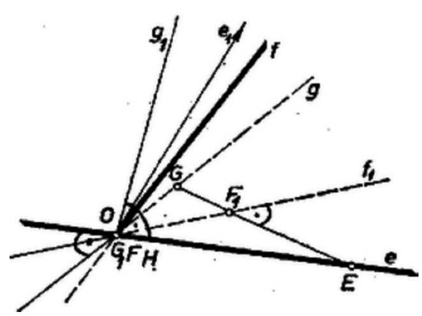
Kizárjuk az olyan eseteket, ha van az e, f, g egyenesek között olyan, amely merőleges a másik kettő síkjára; ekkor ugyanis e_1, f_1 és g_1 közül legalább az egyik pont, így a feladat értelmét veszti. Minden más esetben e_1, f_1, g_1 különböző egyenesek, mert az e, f, az f, g és g, e síkok különbözők, a 3 síknak csak egy közös pontja van, legyen az O. Az e egyenes egy E pontjából f_1-re és g_1-re bocsátott merőlegesek feltétel szerint metszik g-t, ill. f-et.



1. ábra

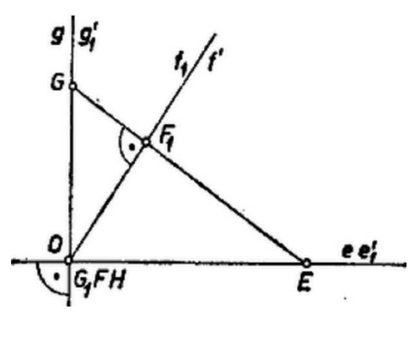
Megmutatjuk, hogy FG merőleges az e, e_1 egyenesek η síkjára; ebből már következik, hogy a kérdésre „igen” a válasz, mert így FG merőleges az η sík minden egyenesére. Messe az EG egyenes f_1-et F_1-ben, EF a g_1-et G_1-ben. Azt állítjuk, hogy a g, g_1 egyenesek γ síkja merőleges EF-re. OG_1 és EF szerkesztés szerint merőlegesek, elég tehát belátnunk, hogy γ tartalmaz egy az EF-re merőleges, egyszersmind az OG_1-gyel nem párhuzamos egyenest is. Ilyen a G_1-ben az e, f síkra állított g_2 merőleges, mert e, f tartalmazza EF-et, másrészt g_2 merőleges g_1-re, végül g_2-n átmegy minden a G_1-et tartalmazó és e, f-re merőleges sík, tehát γ is. Így valóban γ merőleges EF-re. Hasonlóan az $f, f_1 = \varphi$ sík merőleges EG-re.

Az FF_1 és GG_1 egyenesek az EFG síkban vannak, tehát metszik egymást egy H pontban. Így egyrészt OH a φ és γ síkok metszésvonala, ezért merőleges EG és EF mindegyikére, egyszersmind az EFG síkra; tehát az ebben fekvő FG egyenesre is. Másrészt az EFG háromszögben FF_1 és GG_1 magasságvonalak, H a magasságpont, ezért EH mint a harmadik magasságvonal, ugyancsak merőleges FG-re. Legyen EH és FG metszéspontja E_1.



2. ábra

Ezek szerint az $OHE = OE_1E = \eta^*$ sík és a benne fekvő $OE = e$ egyenes is merőleges FG-re. Ebből egyrészt $OE_1 \perp FG$ következik, másrészt az, hogy η^* merőleges az $FOG = f, g$ síkra, ugyanis ez átmegy FG-n, és két sík akkor merőleges egymásra, ha egyikük tartalmaz egy a másikra merőleges egyenest. Azonban feltevésünk szerint az $OE = e$ egyenes nem merőleges az f, g síkra, ezért rajta csak egy az f, g-re merőleges sík fektethető. Így η^* azonos az e vetítéséhez használt η síkkal, és η-nak az f, g-vel való OE_1 metszésvonala azonos e-nek e_1 vetületével; tehát $e_1 \perp FG$. Ezt akartuk bizonyítani.



3. ábra

Ha e merőleges az f és g egyikére, pl. g-re (f-re azonban nem, 2. ábra, a térbeli helyzetnek az e, g síkon levő vetülete a 3. ábra), akkor g_1 is merőleges e-re (g_1-nek az e, g síkon levő vetülete azonos g-vel), ezért F az O-ba esik, így $FG = g$, ami merőleges e_1-re. Érvényesek azonban előző meggondolásaink is, ugyanis G_1 is O-ban adódik, továbbá H is. f_1 viszont nem azonos g-vel, ezért G az O-tól különbözőnek adódik. Így E, F, G nem egy egyenesbe eső pontok, az EFG sík létezik és azonos e, g-vel. Ebben a helyzetben az OH egyenes határozatlannak látszik. Emlékezzünk azonban, hogy fent az OH egyenes nem O és H összekötésével jött létre, hanem mint a φ és γ síkok metszésvonala, ez pedig most is létezik: az O-ban e, g-re állított merőleges (ugyanis γ is, φ is merőleges e, g-re).

A már előre kizárt eseteken túl akkor sincs értelme a kérdésnek, ha az FG egyenes nem jön létre. F csak akkor nem jön létre, ha g_1 merőleges f-re, mert így az e, f síkban az (O-tól különböző) E-ből g_1-re állított merőleges párhuzamos f-fel. Ez azt jelenti, hogy g is merőleges f-re, tehát másrészt G sem jön létre. – Ha F és G létrejött, akkor H is létezik.

Mindezeket összefoglalva a feltett kérdésre válaszunk: ha f és g nem merőlegesek és egyik egyenes sem merőleges a másik kettő síkjára, akkor az FG egyenes létrejön és merőleges e_1-re; a kizárt esetekben a kérdésnek nincs értelme.

Makai Endre (Budapest, Eötvös J. g. II. o. t.)

Megjegyzés. A legtöbb dolgozatban fel sem merül, hogy léteznek-e mindig a szóban forgó egyenesek.