I. megoldás. Legyen az $y = ax^2$ parabola ($a \neq 0$) négy különböző pontja $A(x_1,\, ax_1^2)$, $B(x_2,\, ax_2^2)$, $C(x_3,\, ax_3^2)$, $D(x_4,\, ax_4^2)$. Itt x_1, x_2, x_3, x_4 különbözők, mert pl. $x_1 = x_2$-ből A és B azonossága következnék, a feltevéssel ellentétben. Tegyük fel, hogy A, B, C, D egy paralelogramma csúcsai, azaz $AB \parallel CD$, és $AD \parallel BC$. Eszerint az összekötő egyenesek iránytényezőinek megegyezéséből:

$$\frac{ax_2^2 - ax_1^2}{x_2 - x_1} = \frac{ax_4^2 - ax_3^2}{x_4 - x_3} \quad \text{és} \quad \frac{ax_4^2 - ax_1^2}{x_4 - x_1} = \frac{ax_3^2 - ax_2^2}{x_3 - x_2} \tag{1}$$

(Itt mindegyik tört nevezője 0-tól különböző.) Az (1) egyenlőségek kiemeléssel, szorzattá alakítással és egyszerűsítésekkel így alakulnak:

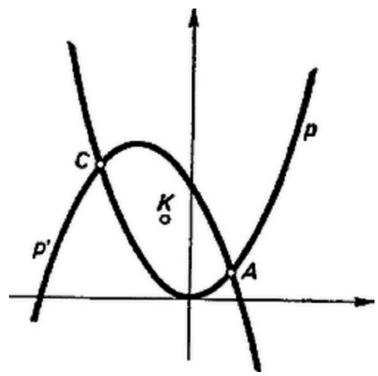
$$\frac{a(x_2^2 - x_1^2)}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 + x_1)(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a(x_2 + x_1) = a(x_4 + x_3),$$

tehát

$$x_2 + x_1 = x_4 + x_3, \quad \text{és ugyanígy} \quad x_4 + x_1 = x_3 + x_2,$$

ezekből pedig a megfelelő oldalak összeadásával és rendezéssel $x_1 = x_3$ adódik, feltevésünkkel ellentétben. Ezért az (1) egyenlőségek egyidejűen nem állhatnak fenn, A, B, C, D nem alkothat paralelogrammát.

Mészáros György (Budapest, Piarista g. III. o. t.)



1. ábra

II. megoldás. Tegyük fel, hogy a p parabolába beírt $ABCD$ négyszög paralelogramma, és tükrözzük ábránkat a négyszög K középpontjára. Ekkor A, B, C, D rendre C, D, A, B-be megy át, p pedig egy p' parabolába. Így a p és p' paraboláknak legalább 4 különböző közös pontjuk van; másrészt tengelyeik párhuzamosak, mert a tükrözés p tengelyét egy vele párhuzamos egyenesbe viszi át. Ha p egyenlete $y = ax^2$, a K pont koordinátái $(\alpha,\, \beta)$, akkor p' csúcsa $(2\alpha,\, 2\beta)$, tengelye az $x = 2\alpha$ egyenes, és egyenlete $y - 2\beta = -a(x - 2\alpha)^2$.

Mármost p és p' közös pontjait keresve ezek abszcisszáit az egyenleteikből y kiküszöbölésével adódó

$$ax^2 = -a(x - 2\alpha)^2 + 2\beta$$

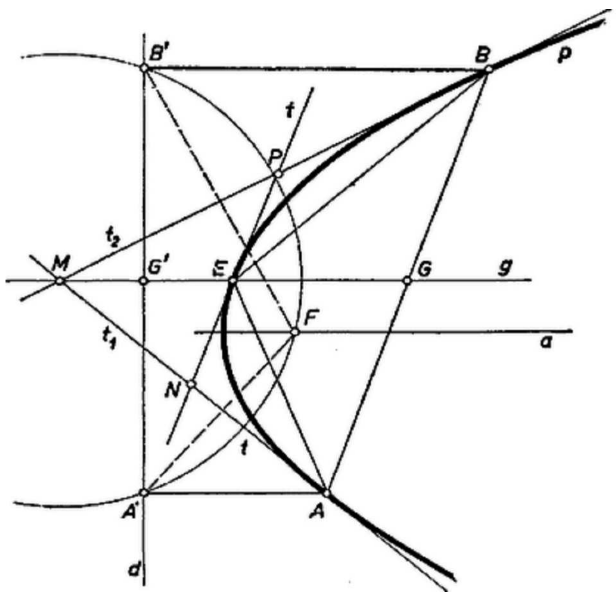
egyenletből kapjuk. Ez másodfokú, tehát p-nek és p'-nek legfeljebb két abszcisszán lehet közös pontja. Másrészt p és p' egyenlete szerint minden x-hez csak egy y érték tartozik, így p és p' közös pontjainak a száma legfeljebb 2.

Ellentmondásra jutottunk fenti megállapításunkkal, tehát feltevésünk hibás, a parabolába nem írható paralelogramma.

Kászonyi László (Szombathely, Nagy Lajos g. IV. o. t.)

III. megoldás. Bebizonyítjuk, hogy véve egy parabolának egy adott iránnyal párhuzamos húrjait, ezek felezőpontjai egy a parabola tengelyével párhuzamos egyenesen vannak rajta. Más szóval: ha egy a p parabolába beírt $ABCD$ négyszög AB és CD oldalai párhuzamosak, akkor ezen oldalak felezőpontját G, ill. H-val jelölve a GH egyenes párhuzamos p-nek a tengelyével.

Ebből már következik a bizonyítandó állítás. Ha ugyanis $ABCD$ paralelogramma volna, akkor az AB és CD oldalak felezőpontjait összekötő szakasz is, a BC és DA oldalak felezőpontjait összekötő szakasz is párhuzamos volna a-val, holott ez a két szakasz metszi egymást a paralelogramma középpontjában.



2. ábra

Legyen az A, B, G pontok vetülete a d vezéregyenesen rendre A', B', G', az A-ban és B-ben p-hez húzott érintő t_1 ill. t_2, metszéspontjuk M. Jelöljük a parabola gyújtópontját F-fel. Ismeretes, hogy t_1 merőlegesen felezi FA'-t, és hasonlóan t_2 az FB'-t, így M az $A'B'F$ háromszög köré írt kör középpontja. Ezen átmegy a $GG' = g$ egyenes is, ugyanis $ABB'A'$ trapézban GG' középvonal, ezért G'-ben merőlegesen felezi $A'B'$-t. g párhuzamos a-val, így azt kaptuk, hogy *a parabola egy húrjának felezőpontján át a tengellyel párhuzamosan húzott egyenes átmegy a húr végpontjaiban húzott érintők metszéspontján.*

Legyen p-nek g-n levő pontja E, az ebben húzott érintő t, és messe ez t_1-et N-ben, t_2-t P-ben. A parabola imént talált tulajdonságát az EA, ill. EB húrra alkalmazva kapjuk, hogy N felezi MA-t, ugyanígy P felezi MB-t, hiszen pl. N rajta van az AE felezőpontján át a-val párhuzamosan húzott egyenesen, ami az AME háromszögnek ME-vel párhuzamos középvonala. Eszerint pedig NP az ABM háromszög AB-vel párhuzamos középvonala, vagyis t párhuzamos AB-vel. Ezzel azt kaptuk, hogy *a parabola egy húrjának felezőpontján át a tengellyel párhuzamosan húzott egyenes átmegy a húrral párhuzamos érintő érintési pontján.*

Eredményünk szerint a CD húr H felezőpontján át a tengellyel párhuzamosan húzott egyenes ugyancsak átmegy E-n, tehát azonos g-vel. Ezzel a bevezetésül kimondott állítást bebizonyítottuk, abból pedig – mint láttuk – következik, hogy az $ABCD$ négyszög nem lehet paralelogramma.

Megjegyzés. A felhasznált segédtételt a koordinátageometria módszereivel is megkaphatjuk. Legyen a parabola egyenlete $y = ax^2$, a párhuzamos húrok közös iránytangense m. Ekkor egy húr egyenese $y = mx + b$, és a húr két végpontjának abszcisszáit a két egyenletből y kiküszöbölésével adódó $ax^2 - mx - b = 0$ egyenlet gyökei szolgáltatják. Ha ezen abszcisszák x_1 és x_2, akkor a felezőpont x_0 abszcisszája a másodfokú egyenlet gyökei és együtthatói közötti, ismert összefüggés alapján

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{m}{2a},$$

független b-től, és változatlan m mellett állandó, tehát minden m irányú húr felezőpontja egy az Y-tengellyel, a parabola tengelyével, párhuzamos egyenesen van rajta. – Ha a fenti másodfokú egyenlet diszkriminánsa eltűnik: $m^2 + 4ab = 0$, akkor $x_1 = x_2$, és az innen adódó $b = -m^2/4a$ értékkel az $y = mx - m^2/4a$ egyenes a parabola érintője, az érintési pontra is teljesül $x_1 = x_2 = x_0$.