

I. megoldás. Legyen a három oldal mértékszámra rendre $a = b - 1$, b , $c = b + 1$ (ahol nyilván $b > 2$). Így a háromszög kerülete $2s = 3b$, területe

$$t = \sqrt{\frac{3b}{2} \left(\frac{b}{2} + 1\right) \frac{b}{2} \left(\frac{b}{2} + 1\right)} = \frac{b}{4} \sqrt{3(b^2 - 4)},$$

ennélfogva ismert összefüggések alapján a beírt és a körülírt kör sugara:

$$(1) \quad \varrho = \frac{t}{s} = \frac{\sqrt{3(b^2 - 4)}}{6}, \quad r = \frac{abc}{4t} = \frac{b^2 - 1}{\sqrt{3(b^2 - 4)}}.$$

Ezekkel a vizsgálandó összefüggés jobb oldala

$$2\varrho + \frac{1}{2\varrho} = \frac{4\varrho^2 + 1}{2\varrho} = \frac{\frac{3(b^2 - 4)}{9} + 1}{\frac{\sqrt{3(b^2 - 4)}}{3}} = \frac{b^2 - 1}{\sqrt{3(b^2 - 4)}},$$

egyenlő r kifejezésével. Tehát az állítás igaz.

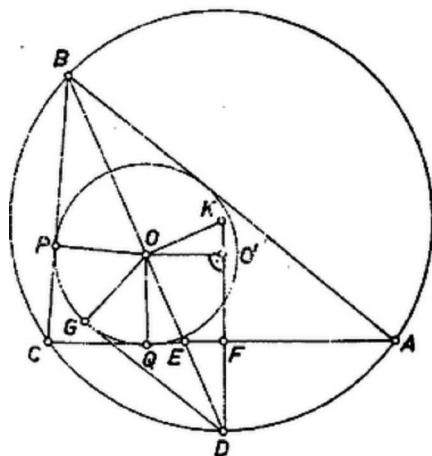
A bizonyításban nem használtuk fel, hogy az oldalak mértékszámai egészek, ezért az összefüggés minden olyan háromszögben fennáll, melyben a legkisebb oldal 1-gyel kisebb, a legnagyobb oldal pedig 1-gyel nagyobb, mint a (nagyságra nézve) középső oldal.

Lepsényi Edit (Budapest, Berzsenyi D. lg. IV. o. t.)

Megjegyzés. Hasonló számítás mutatja, hogy ha az oldalak hossza $b - d$, b és $b + d$, akkor

$$r = 2\varrho + \frac{d^2}{2\varrho}.$$

Ezt más úton mutatjuk meg. Ennek során kissé több számolással a vizsgált háromszögekben további érdekes összefüggéseket is fogunk találni.



II. megoldás. Legyen az ABC háromszögben $AC = b$, $BC = a = b - d$, $AB = c = b + d$, a körülírt kör középpontja K , sugara r , a beírt, kör középpontja O , sugara ϱ , érintési pontja a BC oldalon P , AC -n Q . Ismert összefüggés szerint

$$AQ = \frac{b + c - a}{2} = \frac{b}{2} + d,$$

ha tehát AC felezőpontja F , akkor $FQ = AQ - AF = d$. Messe a CBA szög BO felezője az AC oldalt E -ben, a B -t nem tartalmazó AC ívet, D -ben. $BC < BA$ miatt E a CF szakaszon, szűkebben a QF szakaszon van. Megmutatjuk, hogy E felezi a QF szakaszt. A szögfelező osztásarányára ismert tétel szerint

$$\frac{CB}{AB} = \frac{CE}{AE} = \frac{CF - EF}{AF + EF}, \quad \text{tehát} \quad \frac{b - d}{b + d} = \frac{\frac{b}{2} - EF}{\frac{b}{2} + EF} = \frac{b - 2EF}{b + 2EF},$$

és innen valóban $2EF = d = QF$.

D felezi a mondott AC ívet, ezért DF merőleges AC -re és átmegy K -n. Így a DEF és OEQ derékszögű háromszögek egybevágók, mert egy-egy oldaluk és a rajta fekvő szögeik egyenlők, tehát $FD = QO = \varrho$ és $OE = DE$. Ezért, O -nak KD -n levő vetületét O' -vel jelölve $DO' = DF + FO' = 2QO = 2\varrho$, másrészt $OO' = QF = d$, és így az ODO' derékszögű háromszögből

$$OD^2 = DO'^2 + O'O^2 = 4\varrho^2 + d^2.$$

Érintse a beírt kört a D -ből húzott érintő G -ben, akkor az I. megoldás (1) összefüggéséhez hasonlóan adódó $12\varrho^2 = b^2 - 4d^2$ egyenlőség felhasználásával

$$DG^2 = OD^2 - \varrho^2 = 3\varrho^2 + d^2 = \frac{b^2}{4}, \quad DG = \frac{b}{2}.$$

Így a DOG háromszög egybevágó a BOP háromszöggel, mert az utóbbiban $BP = (a + c - b)/2 = b/2$, ennélfogva $BO = DO$. Eszerint O felezi a körülírt kör BD húrját, és a DKO háromszög O -nál derékszögű. Ebből az ismert mértani középarányos tétel alapján

$$DO' \cdot O'K = OO'^2, \quad 2\varrho(r - 2\varrho) = d^2,$$

ami a bizonyítandó összefüggésnek átrendezett alakja. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Szilágyi Tivadar (Budapest, II. Rákóczi F. g. III. o. t.)