A számtani sorozat minden tagja egyenlő a hozzá képest szimmetrikus helyzetű tagpárok számtani közepével. Ezt felhasználva a követelményt a következő három egyenlettel fejezhetjük ki:

$$a+b=2x_1, \tag{1}$$
$$x_1+x_2=2b, \tag{2}$$
$$a+c=2b. \tag{3}$$

(Ugyanis (1) és (2) biztosítja az $x_1-a=b-x_1=x_2-b=d$ egyenlőséget, (3) és (2) alapján pedig

$$c=2b-a=x_2+x_1-a, \quad \text{és így} \quad c-x_2=x_1-a=d.$$

E három egyenlet egymástól független.)

Másrészt $x_1$ és $x_2$ az adott másodfokú egyenlet gyökei, ezért a gyökök és az együtthatók összefüggései szerint

$$a(x_1+x_2)=-b, \tag{4}$$
$$ax_1x_2=c. \tag{5}$$

Az öt ismeretlent az (1)–(5) egyenletekből határozhatjuk meg. – (2) és (4) alapján

$$2ab=-b, \qquad b(2a+1)=0. \tag{6}$$

Ez kétféleképpen teljesülhet.

**I. eset:** $b=0$. Ekkor (2)-ből és (3)-ból $x_2=-x_1$, $c=-a$; ezekkel (5)-ből

$$-ax_1^2=-a, \quad \left(x_1^2-1\right)=0, \quad x_1^2-1=0,$$

tehát $x_1=\pm 1$ és $x_2=\mp 1$. (Ugyanis $a\neq 0$, mert az ellenkező esetben az adott egyenletnek legfeljebb egy gyöke van.) Ismerjük a sorozat középső három tagját, ebből $a=\pm 2$ és $c=\mp 2$. Valóban, az egymással ekvivalens $2x^2-2=0$ és $-2x^2+2=0$ egyenletek gyökei $+1$ és $-1$, indexezésüket alkalmasan választva – ami nyilván megengedett – az előírt sorrendben a 2, 1, 0, $-1$, $-2$ számtani sorozatot, ill. ennek negatívját kapjuk.

**II. eset:** (6)-ban $2a+1=0$, $a=-1/2$. Ekkor (3), (1) és (2) alapján $c$-t, $x_1$-et és $x_2$-t $b$-vel kifejezve (5)-ből másodfokú egyenletet kapunk $b$-re

$$c=2b+\frac{1}{2}, \quad x_1=\frac{b}{2}-\frac{1}{4}, \quad x_2=2b-x_1=\frac{3b}{2}+\frac{1}{4},$$
$$-\frac{1}{2}\left(\frac{b}{2}-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3b}{2}+\frac{1}{4}\right)=2b+\frac{1}{2},$$
$$4b^2+20b+5=0.$$

Innen

$$b=-\frac{5}{2}\pm\sqrt{5}, \quad c=-\frac{9}{2}\pm 2\sqrt{5},$$

továbbá

$$x_1=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}, \qquad x_2=\frac{-7\pm 3\sqrt{5}}{2}.$$

Itt olyan két együttható-hármast kaptunk, melyek nem ekvivalens egyenleteket adnak. Az első megoldásbál adódó

$$a'=\frac{-1}{2}, \quad x_1'=\frac{\sqrt{5}-3}{2}, \quad b'=\frac{2\sqrt{5}-5}{2}, \quad x_2'=\frac{3\sqrt{5}-7}{2}, \quad c'=\frac{4\sqrt{5}-9}{2} \tag{7}$$

valóban számtani sorozatot adnak, mert a számkifejezések racionális része is, valamint az irracionális $\sqrt{5}$ racionális szorzói is:

$$-\frac{1}{2}, \quad -\frac{3}{2}, \quad -\frac{5}{2}, \quad -\frac{7}{2}, \quad -\frac{9}{2}, \quad \text{ill.} \quad 0, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{2}{2}, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{4}{2},$$

számtani sorozatot alkotnak. Az $a'x^2+b'x+c'=$ egyenletből $x_1'$ és $x_2'$ kiszámítása felesleges, könnyű látni ugyanis, hogy számainkra teljesül (4) és (5).

Az $a'$, $x_1''$, $b''$, $x_2''$, $c''$ megoldás (7)-től csak az irracionális részek előjelében különbözik. Mindezek szerint a követelménynek négy $a$, $b$, $c$ együttható-hármas felel meg.

*Szidarovszky Ferenc* (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn. IV. o. t.)

*Megjegyzés.* (1) és (2)-ből $x_1 = (a+b)/2$, $x_2 = (b+c)/2$. Ezeket az egyenletbe helyettesítve majd különbséget képezve

$$\frac{a(a+b)^2}{4} + \frac{b(a+b)}{2} + c = 0, \quad \frac{a(b+c)^2}{4} + \frac{b(b+c)}{2} + c = 0,$$

$$\frac{a}{4}\left[(a+b)^2 - (b+c)^2\right] + \frac{b}{2}\left[(a+b) - (b+c)\right] =$$

$$= \frac{a-c}{4}\left[a(a+2b+c) + 2b\right] = 0.$$

A második tényezőben (3)-at alkalmazva

$$\frac{1}{2}(a-c)b(2a+1) = 0.$$

Ezzel (6)-tal rokon egyenlethez jutottunk, amiből a fentiekhez hasonlóan folytatható a megoldás.

2. Számos dolgozat a másodfokú egyenlet nagyobb gyökét vette $x_1$-nek, így csak azokat a megoldásokat kapta meg, amelyekben $a > b > c$. Erre nincs megállapodás.