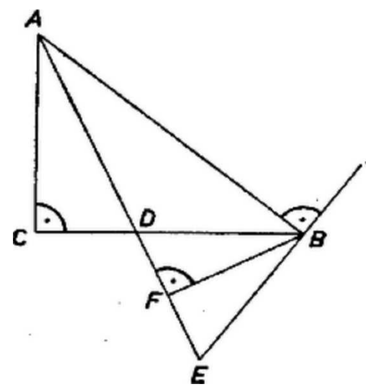
I. megoldás. Legyen a keresett ABC derékszögű háromszög átfogója AB, és messe a BAC szög felezője BC-t D-ben. A háromszöget az $AD = f$ és $BD = q$ szakaszokból kell megszerkesztenünk (ugyanis $BD > CD$, hiszen $BD : CD = AB : AC > 1$).

Messük el AD-t az AB átfogóra B-ben állított merőlegessel (1. ábra), másrészt a B-ből AD-re bocsátott merőlegessel; legyenek a metszéspontok E és F. A BDE háromszög egyenlő szárú, mert E-nél levő belső szöge a BAE szöget egészíti ki $90°$-ra, D-nél levő szögének csúcsszöge pedig a CAE szöget, és ezek a BAC szög felével egyenlők. Így $BE = BD = q$ és F felezi a DE szakaszt.



1. ábra

Az AEB derékszögű háromszögben a befogó mértani közép tulajdonsága szerint

$$AE \cdot EF = BE^2,$$

vagy

Ebből az összefüggésből DE, és annak ismeretében a keresett háromszög megszerkeszthető pl. a következő módon. Rajzoljunk q befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszöget (EBG, $EB = BG = q$, 2. ábra), és ennek átfogóját G-ben érintő $f/2$ sugarú k kört. Az E-n és k középpontján átmenő egyenes E-hez közelebbi és távolabbi metszéspontja legyen D_1 és A_1. Ekkor

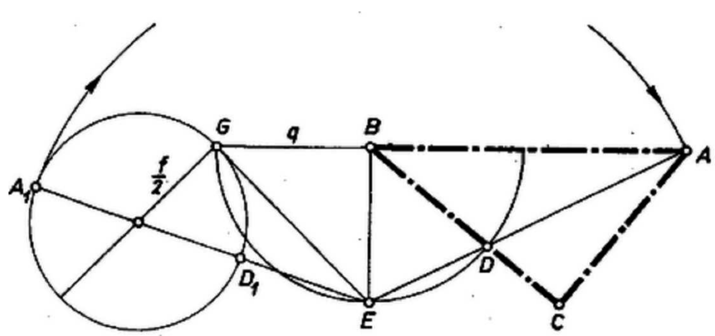
(2)
$$ED_1 \cdot EA_1 = ED_1(ED_1 + f) = EG^2 = 2q^2.$$

Messük a GB egyenest az E középpontú, A_1-en átmenő körrel, egyik metszéspont legyen A, és messük EA-t a B középpontú, q sugarú körrel D-ben. Legyen A merőleges vetülete BD-n C, ekkor az ABC háromszög megfelel a feltételeknek.

Ez a következő módon látható.

$$A_1GE\sphericalangle > A_1GD_1\sphericalangle = 90°, \quad \text{így} \quad A_1E > GE = \sqrt{2}q,$$

amiből következik, hogy $AB > q$, tehát D az EA szakaszra, C pedig a BD szakasz D-n túli meghosszabbítására esik. AD felezi a BAC szöget, mert $BAD\sphericalangle + BEA\sphericalangle = CAD\sphericalangle + ADC\sphericalangle = 90°$, de $ADC\sphericalangle = EDB\sphericalangle = DEB\sphericalangle$, mivel a BDE háromszög szerkesztés szerint egyenlő szárú: $BD = BE = q$.



2. ábra

Azt kell még belátnunk, hogy $AD = f$. A 2. ábra A, B, C, D, E pontjai kielégítik ugyanazokat a feltételeket, mint az 1. ábráéi, így $AE \cdot DE = 2q^2$, de szerkesztés szerint $AE = A_1E$, s így (2)-t is figyelembe véve $AE \cdot DE = A_1E \cdot DE = 2q^2 = A_1E \cdot D_1E$, vagyis $DE = D_1E$, és $AD = AE - DE = A_1E - D_1E = A_1D_1 = f$.

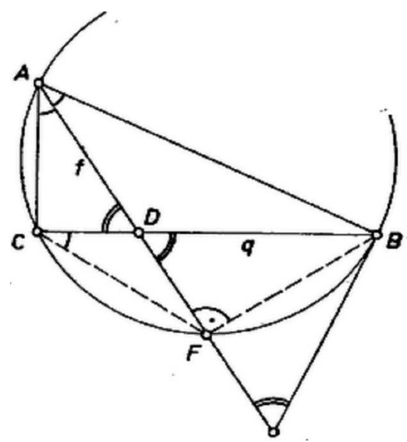
Könnyen látható, hogy a szerkesztés mindig elvégezhető, és egyetlen megoldása van.

Megjegyzés. Lényegében az (1) összefüggéshez jutunk a következő úton is. Az AD egyenes az ABC háromszög köré írt kör A-t nem tartalmazó BC ívét annak F felezőpontjában metszi. (Ez a pont azonos a fenti F-fel, mert utóbbiból AB derékszög alatt látszik, s így ez a pont rajta van a körülírt körön is, AD-n is. Ennek folytán $FD = ED/2$.) Ezért $FAC\triangle \sim FCD\triangle$, mert F-nél közös szögük van, továbbá $FAC\sphericalangle = FAB\sphericalangle = FCB\sphericalangle$. Így $FA : FC = FC : FD$, $FD \cdot FA = FD\ (FD + f) = FC^2 = FB^2 = BD^2 - FD^2 = q^2 - FD^2$, amiből átrendezéssel és szorzással

$$FD(2FD + f) = q^2$$
$$2q^2 = 2FD(2FD + f) = ED(ED + f).$$

Cserháti György és *Forgó Antal* (Eger, Gárdonyi G. g. IV. o. tanulók)

A versenyzők legnagyobb része a szerkesztést több számítás alapján végezte el, ilyen a következő.



3. ábra

II. megoldás. $BAC\sphericalangle = \alpha$ jelöléssel az ABD háromszögből a szinusz tétellel

$$\frac{f}{q} = \frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{\sin\dfrac{\alpha}{2}} = \frac{\cos\alpha}{\sin\dfrac{\alpha}{2}} = \frac{1 - 2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}},$$

miből – az egyenletnek csak a pozitív gyökét véve –

$$2q\sin^2\frac{\alpha}{2} + f\sin\frac{\alpha}{2} - q = 0,$$
$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{f^2 + 8q^2} - f}{4q},$$
$$FD = q\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\left(\frac{f}{4}\right)^2 + \left(\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^2} - \frac{f}{4}.$$

Ez a kifejezés egyszerűen megszerkeszthető, ugyanis a $q/\sqrt{2}$ szakasz egyenlő a q oldalú négyzet köré írható kör sugarával –, tovább az előző megoldás szerint haladhatunk.

Lőrincz Csaba (Orosháza, Táncsics M. g. III. o. t.)