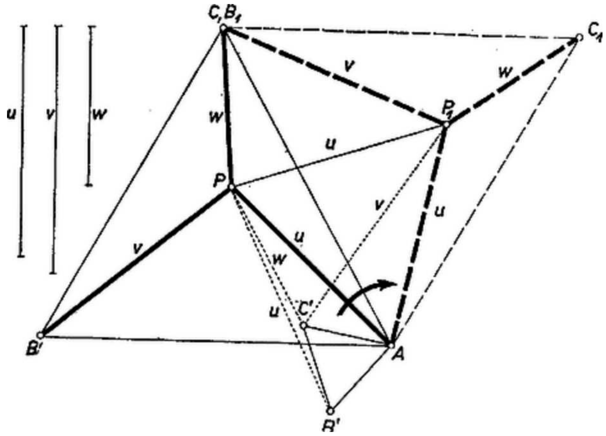
I. megoldás. Legyenek egy a követelménynek megfelelő elhelyezés csúcspontjai P, A, B, C úgy, hogy PA, PB, PC rendre egyenlő az előre megadott u, v, w szakasszal, továbbá $AB=BC=CA$; jelöljük közös hosszukat d-vel. Forgassuk el az alakzatot A körül 60°-kal úgy, hogy B a C-be jusson; legyen P új helyzete P_1, C-é C_1. Ebben az alakzatban ismerjük egyrészt a PAP_1 szabályos háromszög oldalhosszát, másrészt a PP_1C háromszög oldalainak hosszát. Ezekből az egész alakzat a következő lépésekben szerkeszthető.



1. ábra

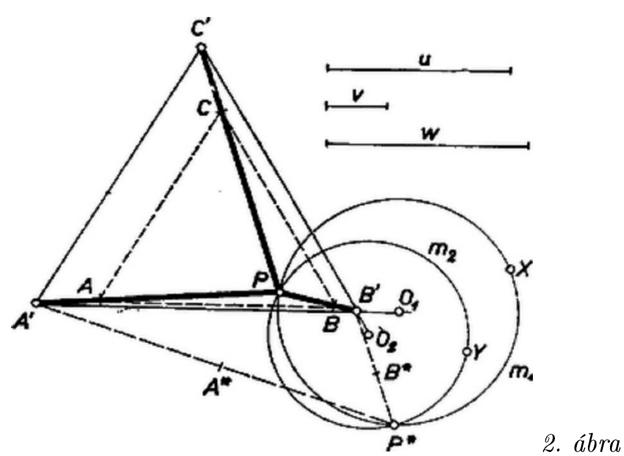
Felvesszük (helyzet szerint) a $PA=u$ szakaszt; megválasztjuk a fent említett forgás irányát és evvel megszerkesztjük P_1-et; a $PP_1=u$ szakaszhoz a $PC=w$ és $P_1C=PB=v$ szakaszokból megszerkesztjük C helyzetét; végül ezt A körül a megválasztottal ellentétes irányban 60°-kal elforgatva kapjuk B helyzetét.

A kapott P, A, B, C alakzat megfelel, mert PA-t és PC-t közvetlenül az előírásnak megfelelően szerkesztettük, PB pedig egyenlő $P_1C=v$-vel, ugyanis az A körüli, a megválasztott iránnyal ellentétes 60°-os forgás P_1-et P-be, C-t B-be viszi át.

C-t a PP_1 egyenes mindkét partján szerkeszthetjük, így legfeljebb 2 megoldás van, mert a többi lépések egyértelműek. C létrejön, ha a PP_1C háromszög megszerkeszthető – vagyis ha az adott szakaszok teljesítik a háromszög egyenlőtlenséget –, megengedhetjük azonban e háromszög egyenes szakasszá elfajulását is, ekkor C a PP_1 egyenesen adódik, csak egy megoldás van[1]. A betűzést úgy választva, hogy álljon $u\leq v\leq w$, a megoldhatóság feltétele: $u+v\geq w$. Ha ez nem teljesül, nincs megoldás.

Fleischer Tamás (Budapest, József A. g. II. o. t.)

II. megoldás. A keresetthez hasonló alakzatot nyerünk, ha egy tetszőleges $A'B'C'$ szabályos háromszög csúcsaiból kiindulva vesszük azon X pontok m_1 mértani helyét, melyekre XA': $XB'=u:v$, majd azon Y pontok m_2 mértani helyét, amelyekre $YB':YC'=v:w$, és P' gyanánt m_1 és m_2 közös pontját vesszük. Ebből a keresett alakzatot olyan hasonlósági transzformációval kapjuk, amely $P'A'$-t $PA=u$ nagyságúra transzformálja.



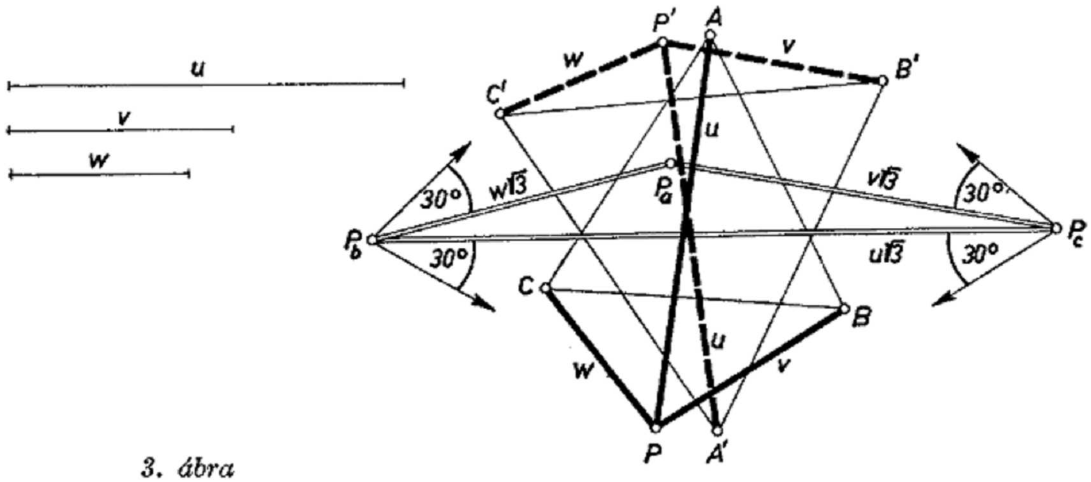
2. ábra

Ismeretes, hogy m_1 az A', B' alappontokhoz és az $u:v$ arányhoz tartozó Apollóniosz-kör, ill. $u=v$ esetén $A'B'$ felező merőlegese. Ebből az m_2 kör (ill. egyenes) 2, 1, vagy 0 megfelelő P' pontot metsz ki. Világos, hogy a P' pontra nézve a $P'C':P'A'=w:u$ arány is a kívánt értékű, s így a hasonlósági transzformációval keletkező háromszög minden követelménynek megfelel.

A szerkeszthetőség és megoldások száma vizsgálatához szükséges számításokra nem térünk ki.

Varga Endre (Kaposvár, Táncsics M. g. III. o. t.)

[1] Könnyű belátni, hogy ilyen esetben A, B, C és P egy kör pontjai.



3. ábra

Megjegyzés. Egy további megoldás menete a következő: Jelöljük P tükörképét a BC, CA, AB egyenesre rendre P_a, P_b, P_c-vel. Bármelyik kettőjük távolsága előállítható adataink egyikéből, így a $P_aP_bP_c$ háromszög megszerkeszthető. Ugyanis pl. az AP_bP_c háromszögben egyrészt $AP_b = AP = AP_c$, másrészt a kisebb P_bAP_c szög a tükrözések miatt 120°-kal egyenlő. Ebből azt is látjuk, hogy az A, B, C pontokat úgy kapjuk, hogy a $P_aP_bP_c$ háromszög oldalaira, mint alapokra egyenlő szárú háromszögeket szerkesztünk alapjukon 30°-os szöggel. Ezekből pedig úgy kapjuk az előírt szakaszok közös P kiindulópontját, mint az A körül u, B körül v és C körül w sugárral írt kör közös pontját.

Bár nem nehéz, de hosszadalmas diszkusszióra vezet a szerkesztés helyességének igazolása és a megoldhatóság és megoldásszám vizsgálata, – ezért nem bocsátkozunk bele.

Kerényi István (Budapest, Bláthy O. erősár. ip. t. III. o. t.)