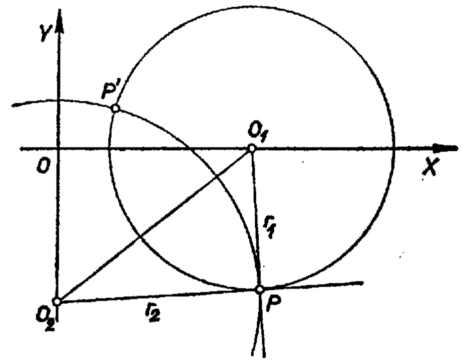
I. megoldás. Legyen a két kör középpontja O_1, ill. O_2, egyik metszéspontjuk P. (A másik metszéspont P-nek O_1O_2-re vett P' tükörképe és ugyanez áll a P-ben és P'-ben húzott érintőkre, ezért az érintők P-ben és P'-ben egyenlő szögeket zárnak be; elég tehát a P-beli szöget vizsgálnunk.) Az érintők merőlegesek a megfelelő sugárra, ezért köreink akkor és csak akkor metszik egymást merőlegesen, ha az PO_1, PO_2 sugarak közti szög derékszög, más szóval ha az O_1O_2P háromszög P-nél derékszögű.



Ehhez elegendő megmutatnunk, hogy teljesül

$$PO_1^2 + PO_2^2 = O_1O_2^2. \tag{3}$$

(1)-ből és (2)-ből teljes négyzetté való kiegészítéssel

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2 - b^2,$$

ill.

$$x^2 + (y-c)^2 = b^2 + c^2,$$

innen látjuk, hogy O_1 koordinátái $(a, 0)$, O_2-éi $(0, c)$ és a sugarak négyzete $r_1^2 = a^2 - b^2$, ill. $r_2^2 = b^2 + c^2$. Minthogy pedig $PO_1 = r_1$ és $PO_2 = r_2$, ezért (3) bal oldala

$$r_1^2 + r_2^2 = a^2 + c^2,$$

másrészt (3) jobb oldalának értéke a koordinátákból ugyancsak ennyi, tehát az állítás igaz.

A (2) kör minden esetre létezik, mert r_2^2 mindig pozitív, csak $b = c = 0$ esetén 0, ekkor a kör ponttá fajul el. Az (1) kör viszont csak $|a| > |b|$ esetén; $|a| = |b|$ esetén pedig ponttá zsugorodik. A két kör egybeesése csak $O_1 = O_2$ és $r_1 = r_2$ mellett következnék be, azaz ha $a = 0$, $c = 0$, ill. $b^2 = 0$. Láttuk, hogy ebben az esetben mindkét kör ponttá fajul el.

Orlay Imre (Budapest, Budai Nagy A. Gimn. IV. o. t.)

II. megoldás. Megmutatjuk, hogy az O_1P, O_2P egyenesek m_1, ill. m_2 iránytényezői egymásnak negatív reciprokai, más szóval, hogy szorzatukhoz 1-et adva 0-t kapunk. Ebből már következik, hogy O_1P és O_2P merőlegesek, és így ugyanez áll a P-ben húzott érintőkre is. Legyenek P koordinátái (x_0, y_0). O_1, O_2-nek az I. megoldásban felírt koordinátáival

$$m_1 = \frac{y_0}{x_0 - a}, \quad m_2 = \frac{y_0 - c}{x_0}, \quad \text{és így}$$

$$m_1 m_2 + 1 = \frac{y_0(y_0 - c)}{(x_0 - a)\, x_0} + 1 = \frac{x_0^2 + y_0^2 - ax_0 - cy_0}{x_0(x_0 - a)}. \tag{4}$$

Ennek értéke valóban 0, mert (x_0, y_0) az (1)-et is, (2)-t is kielégíti, s így az azok összeadásával keletkező egyenletet is, tehát

$$2\left(x_0^2 + y_0^2 - ax_0 - cy_0\right) = 0.$$

Számításunkban feltételeztük, hogy $x_0 \neq 0$ és $x_0 \neq a$. Ha $x_0 = 0$, akkor (1)-ből $y_0^2 + b^2 = 0$, ami csak $b = 0$ mellett lehetséges, és ekkor $y_0 = 0$-ra vezet. Ekkor az (x_0, y_0) pontban az (1) kör érintője az Y-tengely, a (2)-é az X-tengely, ezek merőlegesek, az állítás tehát helyes.– Ha $x_0 = a$, akkor P az O_1-ben az X tengelyre állított merőlegesen van. Ekkor (1)-ből $y_0^2 = a^2 - b^2 = r_1^2 \neq 0$, és így(2)-ből

$$c = \frac{x_0^2 - b^2 + y_0^2}{2y_0} = \frac{2y_0^2}{2y_0} = y_0,$$

vagyis P az O_2-ben az Y-tengelyre állított merőlegesen van, az állítás ekkor is igaz.

Tar Teréz (Ócsa, Bolyai J. Gimn. IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. Nem lényegesen különböző megoldást kapunk annak megmutatásával, hogy P rajta van az O_1O_2 átmérő fölötti Thalész-körön.

2. Többen az iskolai tananyagon kívül álló – néhol messze túlmenő – fogalmak, tételek felhasználásával adtak további megoldást (pont hatványa körre; differenciál hányados). Tételekre való hivatkozásokat csak akkor fogadunk el, ha a versenyző azokat be is bizonyítja. Ez viszont az adott esetben messze vezetne.