I. megoldás. Láttuk, hogy a felírt sorokban az egyenlőségi jel előtti négyzetszámok alapjai sorról sorra 4-gyel többel nőnek. Az 1. sorról a 2.-ra a növekedés $8=2\cdot 4$, így az $n-1$-edik sorról az n-edikre $n\cdot 4$. Így az várható, hogy az n-edik sor középső négyzetszámának az alapja

$$4+8+12+\ldots+4n=\frac{(4+4n)n}{2}=2n^2+2n$$

lesz, a sor kezdő tagjának alapja $2n^2+n$, utolsó tagjáé $2n^2+3n$. Így a táblázat kérdéses sora csak ez lehet:

$$\begin{gathered}(2n^2+n)^2+(2n^2+n+1)^2+\ldots+(2n^2+2n)^2=\\=(2n^2+2n+1)^2+(2n^2+2n+2)^2+\ldots+(2n^2+3n)^2.\end{gathered}$$

A két oldal egyenlőségének bizonyításához felhasználjuk, hogy az 1-től k-ig terjedő egész számok négyzeteinek $S(k)$ összege

$$S(k)=1^2+2^2+\ldots+(k-1)^2+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

A bal oldal értéke két ilyen összeg különbségeként számítható:

$$\begin{gathered}S(2n^2+2n)-S(2n^2+n-1)=\\=\frac{(2n^2+2n)(2n^2+2n+1)(4n^2+4n+1)}{6}-\frac{(2n^2+n-1)(2n^2+n)(4n^2+2n-1)}{6}.\end{gathered}$$

Egyes tényezőket szorzattá alakítva, majd kiemeléssel és polinommá alakítással:

$$\begin{gathered}=\frac{1}{6}\left[2n(n+1)(2n^2+2n+1)(2n+1)^2-(2n-1)(n+1)n(2n+1)(4n^2+2n-1)\right]=\\=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\left[(8n^3+12n^2+8n+2)-(8n^3-4n+1)\right]=\\=S(n)\cdot(12n^2+12n+1).\end{gathered}$$

Hasonlóan a jobb oldal:

$$\begin{gathered}S(2n^2+3n)-S(2n^2+2n)=\frac{1}{6}\left[(2n^2+3n)(2n^2+3n+1)(4n^2+6n+1)-\right.\\\left.-(2n^2+2n)(2n^2+2n+1)(4n^2+4n+1)\right]=\\=\frac{1}{6}\left[n(2n+3)(2n+1)(n+1)(4n^2+6n+1)-2n(n+1)(2n^2+2n+1)(2n+1)^2\right]=\\=S(n)\cdot\left[(8n^3+24n^2+20n+3)-(8n^3+12n^2+8n+2)\right]=\\=S(n)\cdot(12n^2+12n+1),\end{gathered}$$

vagyis valóban egyenlő a bal oldallal.

Minárik László (Tamási, Béri Balogh Á. g. IV. o. t.)

II. megoldás. A táblázat számainak szabályszerűségeire nem tekintve az n-edik sor középső (vagy kezdő-, vagy záró) tagját meghatározhatjuk egyenlettel is. Pl. az x^2 középső tagra – amely előtt is, utána is n tag áll – teljesülnie kell az

$$(x-n)^2+(x-n+1)^2+\ldots+(x-1)^2+x^2=(x+1)^2+(x+2)^2+\ldots+(x+n)^2$$

egyenletnek. Látható előre, hogy kifejtés után az x-től független tagok kiesnek:

$$x^2-2x\left[n+(n-1)+\ldots+1\right]=2x\left[1+2+\ldots+(n-1)+n\right].$$

Az egyik gyök 0, érdektelen, a másik pedig

$$x=2\cdot 2(1+2+\ldots+n)=2n^2+2n.$$

Itt nincs szükség annak bizonyítására, hogy az egyenlőség fennáll. Csak azt mutatjuk meg, hogy $n=1$, 2, 3, 4-re az előre felírt sorokat kapjuk. x értéke rendre $2\cdot 1^2+2\cdot 1=4$, ill. 12, ill. 24, ill. 40.

Barth Albert (Budapest, Madách I. g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. A felírt n-edik sor helyességét úgy is bizonyíthatjuk, hogy a bal oldal tagjait az első kivételével átvisszük a jobb oldalra és rendre levonjuk az ott álló tagokból. Az így adódó négyzetkülönbségeket szorzattá alakítva az alapok különbsége mindig n, az alapok összegei pedig számtani sorozatot alkotnak:

$$\left[(2n^2+2n+1)^2-(2n^2+n+1)^2\right]+\left[(2n^2+2n+2)^2-\right.$$
$$\left.-(2n^2+n+2)^2\right]+\ldots+\left[(2n^2+3n)^2-(2n^2+2n)^2\right]=$$
$$=n\left[(4n^2+3n+2)+(4n^2+3n+4)+\ldots+(4n^2+5n)\right]=$$
$$=n\cdot n(4n^2+4n+1)=n^2(2n+1)^2=(2n^2+n)^2,$$

vagyis a jobb oldal egyenlő a bal oldalon hagyott egyetlen taggal.

Berecz Ágota (Makó, József A. g. III. o. t.)

2. A táblázat adott sorainak első, ill. utolsó alapszámát szorzattá alakítva is kaphatunk sejtést az n-edik sor kezdő, ill. záró alapszámára:

$$1\cdot 3,\ 2\cdot 5,\ 3\cdot 7,\ 4\cdot 9,\quad \text{általában}\quad n(2n+1),\quad \text{ill.}$$
$$1\cdot 5,\ 2\cdot 7,\ 3\cdot 9,\ 4\cdot 11,\quad \text{általában}\quad n(2n+3).$$

(A középső tag többféleképpen bontható.)

Illi József (Szigetvár, Zrinyi M. g. IV. o. t.)