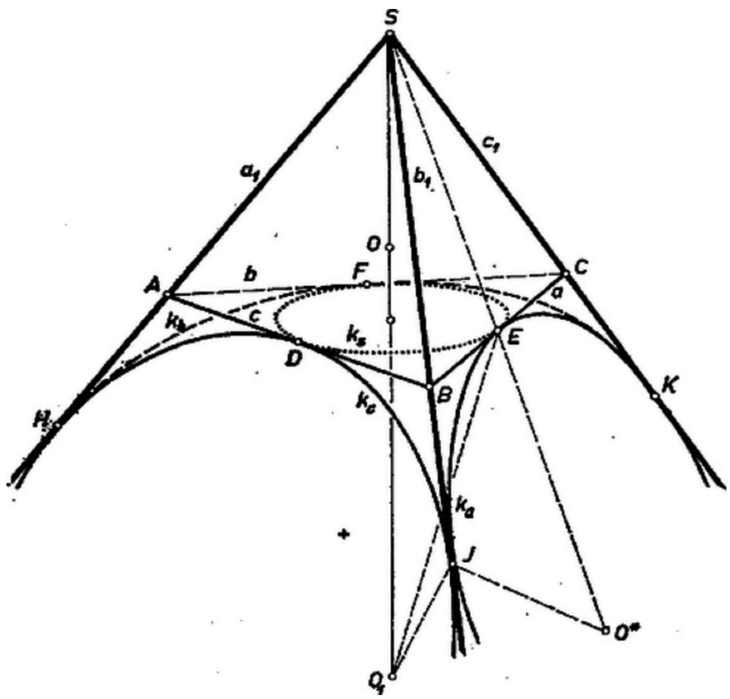
a) Azon, hogy egy t egyenes és egy G gömb érintik egymást a T pontban, azt értjük, hogy t-nek és G-nek egyetlen közös pontja T. Bármely a t-n átmenő S sík G-ből egy k kört metsz ki – kivéve a T-hez tartozó gömbsugárra merőleges síkot, G-nek T-beli érintősíkját, amelynek G-vel egyetlen közös pontja T. Minden ilyen k kör és t ugyancsak érintik egymást T-ben. Valóban, T közös pontja t-nek és k-nak, de több közös pontjuk nincs, mert ha volna, ez t-nek és G-nek is közös pontja volna.

Legyen G_1 az $SABC = N$ tetraéder valamennyi élét érintő öt gömb egyike, legyen az érintési pont az AB, BC, CA, SA, SB, ill. SC élen rendre D, E, F, H, J, ill. K, legyen továbbá G_1-nek az ABC, SAB, SBC, SCA lappal való metszésvonala rendre a k_s, k_c, k_a, ill. k_b kör. Ezek valóban körök – mert pl. k_s átmegy a D, E, F pontokon, ezek pedig nem eshetnek egybe, mert nincs az AB, BC, CA egyeneseknek közös pontjuk. Így a 4 kör rendre érinti az ABC, az SAB, az SBC, ill. az SCA háromszög oldalegyeneseit, és ezért rendre azonos a megfelelő háromszögbe beírt körrel, vagy valamelyik hozzáírt (külső érintő) körrel. Ismeretes, hogy a beírt kör mindegyik oldalegyenest az oldalszakaszon érinti (mind a három érintési pont belső), a 3 hozzáírt kör pedig az oldalegyenesek egyikét az oldalszakaszon érinti, a további kettőt pedig az előbbi szakasz végpontjain túli félegyenesükön (1 belső és 2 külső érintési pont).



1. ábra

Vegyük sorra a körök beírt, ill. hozzáírt voltára lehetséges kombinációkat. Tegyük fel, hogy k_s az ABC háromszögben beírt kör – vagyis D, E, F a megfelelő oldalszakaszon van –, és legyen H az SA szakasz A-n túli meghosszabbításán (1. ábra). Így k_c az SAB háromszög AB oldalához, k_b pedig az SAC háromszög AC oldalához hozzáírt külső érintő kör, ezért J az SB él B-n túli, K pedig az SC-nek C-n túli meghosszabbításán van, tehát k_a ugyancsak hozzáírt kör, vagyis G_1 az N lapjaiból 1 belső és 3 hozzáírt kört metsz ki. – További 3 ilyen gömb (G_2, G_3, G_4) úgy adódik, ha rendre k_a-t, k_b-t, k_c-t vesszük beírt körnek, és egy további érintési pontot egy él meghosszabbításán választunk. – Ha pedig k_s ismét beírt kör és H az SA szakasz pontja (2. ábra), akkor k_c és k_b is beírt kör, és így k_a is, ez a G_5 gömb N minden lapjából beírt kört metsz ki. – Nem lehet mind a négy kör hozzáírt kör, mert ha abból indulunk ki, hogy k_a az SBC háromszögnek pl. a BC oldalához hozzáírt köre (1. ábra), akkor E a BC szakaszon van, J és K pedig BC-nek S-sel ellentétes oldalán, ezért k_b már csak az AC oldalhoz, k_c pedig csak az AB-hez hozzáírt kör lehet, viszont F az AC, D az AB szakaszon van, ezért k_s beírt kör. Nincs tehát 5-nél több lehetőség az összes éleket – vagy meghosszabbításukat – érintő gömbre.

Megmutatjuk, hogy ha mind az 5 gömb létezik, akkor N összes élei egyenlők; így N lapjai szabályos háromszögek és N szabályos tetraéder. A körhöz külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlősége alapján N egyes csúcsaiba befutó 3 élegyenesen az érintési szakaszokra fennáll:

(1)
$$SH = SJ = SK, \qquad AD = AF = AH,$$
$$BD = BE = BJ, \qquad CE = CF = CK.$$

Ezek alapján bármelyik él hossza kifejezhető más három él hosszával, és a négy él között összefüggést kapunk. G_1-ből (1. ábra)

$$AB = AD + DB = AF + JB = (AC - CF) + (SJ - SB) =$$
$$= AC - SB + (SK - CK) = AC - SB + SC,$$

tehát

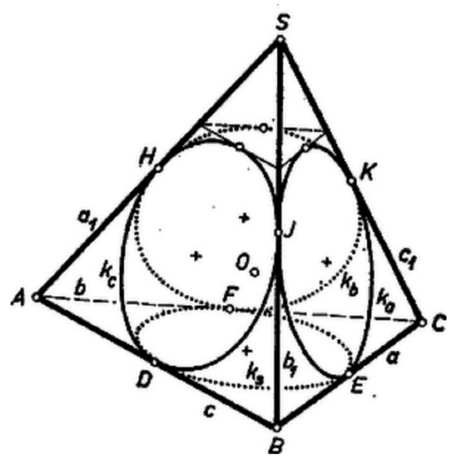
(2a) $$AB - SC = AC - SB,$$

és hasonlóan (AF helyett AH-val, JB helyett EB-vel kezdve)

(2b) $$AB - SC = BC - SA.$$

A (2), (3) egyenlőség–pár G_1 létezésének szükséges feltétele. A beírt kört tartalmazó ABC lapot alaplapnak, N többi lapjait oldallapnak véve ezt kaptuk: *külső élérintő gömb létezéséhez szükséges, hogy bármelyik oldalélt a szemben fekvő alapélből kivonva ugyanaz a különbség adódjék.* Legyen röviden $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $SA = a_1$, $SB = b_1$, $SC = c_1$, ekkor (2a) és (2b) így alakul:

(2) $$a - a_1 = b - b_1 = c - c_1.$$



2. ábra

Az SBC lapból k_a beírt kört, a többiekből hozzáírt kört kimetsző G_2 gömb esetében az alapélek a, b_1 és c_1, ezért (2)-ből

(3) $$a - a_1 = b_1 - b = c_1 - c.$$

Ezt (2)-vel egybevetve G_1 és G_2 egyidejű létezésének feltétele $b - b_1 = 0$, vagyis

(4) $$a = a_1, \quad b = b_1, \quad c = c_1.$$

G_3 és G_4 létezését (G_1 és G_2 mellett) feltételezve már nem kapunk újabb feltételeket.
G_5 létezéséből (2. ábra)

$$AB = AD + DB = AF + BJ = AC - CF + SB - JS =$$
$$= AC + SB - (CK + KS) = AC + SB - SC,$$

tehát $AB + SC = AC + SB$, és hasonlóan $AB + SC = BC + SA$, összefoglalva

(5) $$a + a_1 = b + b_1 = c + c_1.$$

(4) és (5) szerint már G_1, G_2 és G_5 létezéséből következik az összes élek egyenlősége, amit bizonyítani akartunk.

b) Legyen most N egy szabályos tetraéder. A középe írt gömb O középpontja minden oldaléltől egyenlő távol van, mert az SO tengely körül 120°-kal elforgatva N önmagába megy át, és így O és az SO egyenes minden pontja egyenlő távol van az a, b, c élektől, másrészt az a_1, b_1, c_1 élektől is. Mivel az AO tengely körüli 120°-os forgás is önmagába viszi át N-et, ezért O az a és b_1 éltől is egyenlő távol van, tehát mind a 6 éltől, a fenti G_5 létezik.

Ha találunk SO-n még egy pontot, amely a-tól és b_1-től egyenlő távol van, az is egy kívánt gömbnek (szükségképpen egy külső élérintő gömbnek) a középpontja. – Az SBC háromszög BC oldalához hozzáírt k_a kör BC-t ennek E felezőpontjában érinti, SB-n levő érintési pontja legyen J, középpontja O^*. O^* az SE egyenesen van, mert SBC egyenlő oldalú háromszög. SE benne van N-nek OSA szimmetriasíkjában, amely merőleges az SBC lapra. Így az O^*-ban SBC-re állított merőleges is benne van az OSA síkban, tehát metszi az SO tengelyt egy O_1 pontban. Erre nézve O_1E és O_1J egyenlők, mert átfogók az O_1O^*E és O_1O^*J derékszögű háromszögekben, amelyekben az O_1O^* befogó közös, és az O^*E, O^*J befogók egyenlők. O_1E adja O_1-nek a-tól való távolságát, mert BC merőleges az O_1-et tartalmazó OSA szimmetriasíkra; O_1J pedig O_1-nek b_1-től való távolságát, mert SB a J-ben érinti k_a-t, így az O_1 körül O_1J sugárral írt G_1 gömböt is, amely tartalmazza k_a-t.

O_1-ből a szabályos tetraéder szimmetriáival az AO, BO, CO tengelyeken kapjuk a további G_2, G_3, G_4 élérintő gömbök középpontját. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Megjegyzések. 1. A *b)* részben G_5 létezéséből G_1 létezését így is beláthatjuk: Vegyük a G_5 által az S-ben összefutó lapsíkokból kimetszett körökhöz az AB, BC, CA egyenessel párhuzamos érintőt (2. ábra). Ezek a szimmetria miatt az SA, SB, SC éleket páronként egybeeső pontokban metszik. Ezek és S egy szabályos tetraéder csúcsai, ennek élei érintik G_5-öt, éspedig 3 az élszakaszon, 3 a meghosszabbításon.

Szidarovszky Ferenc (Budapest, Fazekas M. gyak. g. IV. o. t.)

2. Láttuk, hogy G_1, G_2 és G_5 létezése – vagyis két külső és egy belső élérintő gömb – már biztosítja, hogy N csak szabályos lehet. Kérdezhetjük: elég-e három külső élérintő gömb létezése a szabályosság biztosításához, lehet-e szűkíteni a feltevést?

Könnyű belátni, hogy nem lehet. k_b-t beírt körnek, a többi hármat hozzáírt körnek véve (2)-ből a feltétel $a_1 - a = b - b_1 = c_1 - c$ és ez (4) miatt teljesül, ekkor létezik G_3 is. (4) viszont akkor is teljesül, ha a, b, c egy nem szabályos háromszög oldalai, és a szemben fekvő oldalélek hossza rendre ugyancsak a, b, c. Ilyen tetraéderben létezik 4 külső élérintő gömb, ellenben nem létezik belső élérintő gömb, mert (5) nem teljesül. (A mondott tulajdonságú tetraéder létezik, ha a, b, c hegyesszögű háromszöget határoznak meg. Ezt a több érdekes tulajdonsággal bíró négylapot a kristálytanban *szfenoid*nak nevezik.)

3. Hasonlóan nyerjük (2) és (5) egybevetéséből, hogy egy belső és egy külső élérintő gömb létezése esetén a tetraéder szabályos háromoldalú gúla: $a = b = c$ és $a_1 = b_1 = c_1$.