I. megoldás. Ismeretes, hogy $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$. Kifejezhetjük $\cos 3x$-et is $\cos x$-szel:

$$\cos 3x = \cos(2x + x) = \cos 2x\, \cos x - \sin 2x\, \sin x =$$
$$= 2\cos^3 x - \cos x - 2\sin^2 x \cos x = 2\cos^3 x - \cos x -$$
$$-2\big(1 - \cos^2 x\big) \cos x = (4\cos^2 x - 3) \cos x. \tag{2}$$

Ezekkel (1) így alakul

$$\cos^2 x + 4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1 + \big(16 \cos^4 x - 24 \cos^2 x + 9\big)\cos^2 x = 1,$$
$$2 \cos^2 x\big(8 \cos^4 x - 10 \cos^2 x + 3) = 0.$$

Ez úgy lehet 0, ha valamelyik tényező 0. A második tényező eltűnése $\cos^2 x$-re másodfokú egyenletet ad. Ezt megoldva azt nyerjük, hogy (1) akkor teljesül, ha

$$\text{vagy} \quad \cos^2 \mathrm{x} = 0, \qquad \text{vagy} \quad \cos^2 \mathrm{x} = \frac{3}{4}, \quad \text{vagy} \quad \cos^2 \mathrm{x} = \frac{1}{2},$$

azaz ha

$$x_1 = 90° + n \cdot 180°, \quad x_2 = 30° + n \cdot 180°, \quad x_3 = 150° + n \cdot 180°,$$
$$x_4 = 45° + n \cdot 180°, \quad x_5 = 135° + n \cdot 180° \quad (n \text{ egész szám}).$$

A $0° - 360°$ intervallumban az egyenletnek 10 megoldása van.

Az első három és az utolsó két megoldás összevonva egyszerűbben írható fel:

$$x' = 30° + n \cdot 60°, \qquad x" = 45° + n \cdot 90°.$$

Ringler András (Esztergom, I. István g. III. o. t.)

II. megoldás. Az egyenletet 0-ra redukálva a bal oldalt a

$$2 \cos u \cos v = \cos(u - v) + \cos(u + v)$$

azonosság ismételt alkalmazásával szorzattá alakíthatjuk:

$$\frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos 4x}{2} + \cos^2 3x - 1 = \cos 3x\, \cos x + \cos^2 3x =$$
$$= \cos 3x(\cos x + \cos 3x) = 2 \cos 3x\, \cos x\, \cos 2x = 0.$$

Így a gyökök a következő három egyenletből számíthatók:

$$\cos 3x = 0, \qquad \cos x = 0, \qquad \cos 2x = 0, \quad \text{éspedig}$$
$$3x = 90° + n \cdot 180°, \qquad x = 90° + n \cdot 180°, \qquad 2x = 90° + n \cdot 180°.$$

Az I. megoldás (2) azonossága mutatja, hogy $\cos x = 0$ mellett $\cos 3x = 0$ is teljesül, ezért a második egyenlet nem hoz új gyököket. A megoldás ismét

$$x = 30° + n \cdot 60°, \quad \text{és} \quad x = 45° + n \cdot 90°,$$

ahol n egész szám.

Torner Zoltán (Budapest, Piarista Gimn. III. o. t.)