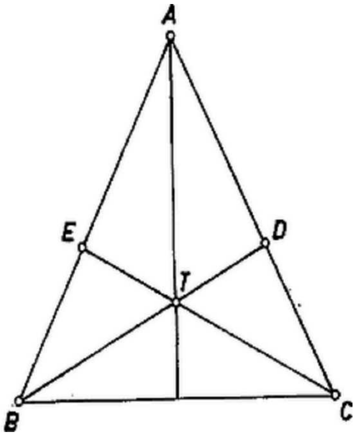
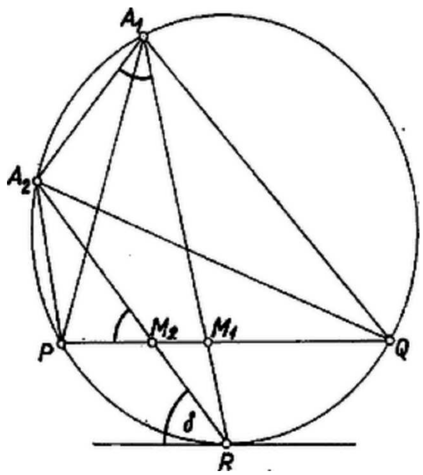
I. megoldás. Vizsgáljuk először azt az esetet, ha D és E az AC ill. AB félegyenesen van (1. ábra). Rajzoljunk egy a $BD = CE$-vel egyenlő hosszú PQ szakaszt és e fölé, a PQ egyenes ugyanazon az oldalán egy a BAD háromszöggel egybevágó PA_1Q és egy a CAE-vel egybevágó PA_2Q háromszöget úgy, hogy az A_1-ből, ill. A_2-ből induló rövidebb oldal végpontja legyen P, ha a két oldal nem egyenlő (2. ábra).



1. ábra



2. ábra

Ha a két háromszög egybeesik, ez azt jelenti, hogy vagy D a C-vel és E a B-vel egybeeesik (ebben az esetben nem teljesül szükségképpen a feladat állítása), vagy $AB = AC$ és $AD = AE$. Ha A_1PQ és A_2PQ különböző háromszögek, akkor megmutatjuk, hogy A_1-ből, ill. A_2-ből induló szögfelezőiknek a szemközti oldalig terjedő szakaszai is különböző hosszúak. Ebből következni fog, hogy A_1 és A_2 nem lehet különböző, mert BD és CE a DAB szög felezőjén metszik egymást, s így, ha a két szakasz nem esik egybe, a BAD és CAE háromszögek A-ból induló szögfelezői nem lehetnek egyenlő hosszúak.

A szóban forgó két háromszög körülírt köre azonos, mert a PQ oldallal szemközti szögeik egyenlők és csúcsaik a PQ egyenes ugyanazon oldalán vannak. Az A_1-ból, ill. A_2-ből induló szögfelezőik az ezeket a csúcsokat nem tartalmazó PQ ív R felező pontján mennek át; messék a PQ oldalt az M_1 ill. M_2 Pontban. Feltehetjük, hogy a jelöléseket úgy választottuk, hogy a körön a pontok R, P, A_2, A_1 sorrendben következnek. Ekkor M_2 a P és M_1 közt van, a háromszögek oldalaira tett kikötések folytán M_1 is, M_2 is a PQ szakasz P-felőli felére esik.

A kör R-ben húzott érintője párhuzamos PQ-val, s így az RA_2 egyenessel bezárt δ hegyes szöge egyenlő a PM_2A_2 szöggel. Másrészt δ az RPA_2 íven nyugvó kerületi szög, s így egyenlő az RA_1A_2 szöggel, mert A_1 a P-t nem tartalmazó A_2R íven van. Így az $A_1A_2M_2M_1$ négyszög húrnégyszög, mert M_2-nél levő külső szöge egyenlő a szemközti A_1 csúcsnál levő belső szöggel. Ennélfogva a köréje írt kör R-ből húzható szelőire:

$$RM_1 \cdot RA_1 = RM_2 \cdot RA_2.$$

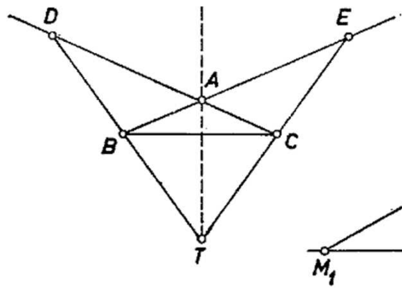
Az M_1 és M_2 pontok sorrendjére tett megállapításból következik, hogy $RM_1 < RM_2$, mert az RM_1M_2 háromszög M_1-nél levő szöge tompaszög. Így a fenti egyenlőségből következik, hogy

$$RA_1 > RA_2.$$

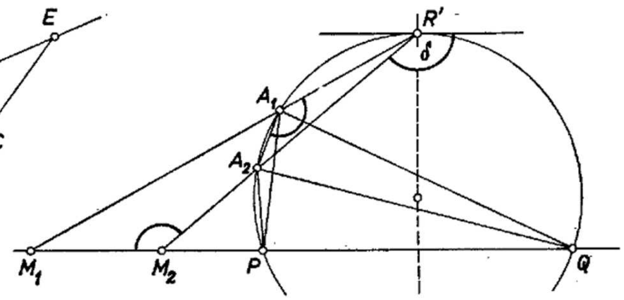
Ezeket a szakaszokat az M_1, ill. M_2 ponttal két részre bontva és az egyenlőtlenséget átrendezve

$$A_1M_1 > A_2M_2 + M_2R - M_1R > A_2M_2,$$

vagyis a két szóban forgó szögfelező különböző. Láttuk azonban, hogy ez nem lehetséges, így a feladat állítása helyes.



3. ábra



4. ábra

Ha D és E az AC és AB szakasz A-n túli meghosszabbításán van (3. ábra), akkor B és D a BAC szög felezőjének egyik oldalán, C és E a másik oldalán van. Így, ha a BD és CE egyenes metszi ugyanabban a pontban a szögfelező egyenest, a metszéspont csak a BD és CE szakaszokon kívül lehet. Így a szögfelező az ABD és ACE háromszögek külső szögfelezője lehet, és ennek az A csúcstól a szemközti oldalig terjedő szakasza a két háromszögre nézve egyenlő (egybeesik). Rajzoljunk ismét a két háromszöggel egybevágó A_1PQ és A_2PQ háromszöget közös PQ alappal úgy, hogy A_1-et és A_2-t se a PQ egyenes, se a PQ szakasz felező merőlegese ne válassza el egymástól (4. ábra). A két háromszög köré írt kör itt is azonos, mert a PQ oldallal szemben levő szögek egyenlők, hiszen az ABD és ACE háromszögekben az A-nál levő szögek csúcsszögek. Az A_1PQ háromszög A_1-nél levő külső szögének a felezője merőleges a belső szögfelezőre, s így átmegy a fenti R-rel átellenes R' ponton (az A_1-et tartalmazó PQ ív felezőpontján). Ugyanitt megy át az A_2PQ háromszög A_2-nél levő külső szögének a felezője is. Ha a körön a pontok R', A_1, A_2, P sorrendben következnek, akkor a szögfelezők PQ egyenesen levő M_1, M_2 metszéspontjaira a Q, P, M_2, M_1 sorrend áll fenn.

A kör R'-ben húzott érintője párhuzamos PQ-val, így az $R'M_2$-vel bezárt δ tompaszöge az M_1M_2R' szöggel egyenlő. Másrészt δ a P-t tartalmazó $R'A_2$ íven nyugvó kerületi szög, s így egyenlő az A_2A_1R' szöggel, mert A_1 a P-t nem tartalmazó $R'A_2$ íven van. Az $A_1A_2M_2M_1$ négyszög tehát itt is húrnégyszög, s így

$$R'A_1 \cdot R'M_1 = R'A_2 \cdot R'M_2.$$

Az $R'M_2M_1$ szög tompaszög, s így $R'M_1 > R'M_2$, amiből a nyert egyenlőség folytán

$$R'A_1 < R'A_2.$$

Ebből következik, hogy

$$A_1M_1 = R'M_1 - R'A_1 > R'M_2 - R'A_2 = A_2M_2,$$

vagyis az A_1 ill. A_2 csúcstól a szemközti oldalig terjedő külső szögfelező szakaszok különbözők, ha A_1 és A_2 különböző. Ez nem lehetséges, kell tehát, hogy A_1 és A_2 egybe essék. Ekkor vagy $AB = AC$ és $AD = AE$, vagy $AB = AE$ és $AC = AD$. Utóbbi esetben BD és CE párhuzamos volna a BAC szög felező egyenesével, holott feltettük, hogy mindkettő metszi közös pontban ezt az egyenest. A feladat állítása tehát teljesül.

II. megoldás. A BD és CE szakaszok metszéspontját T-vel jelölve az ABD és ACE háromszögek A-nál levő szöge közös, a szemben levő BD és CE oldaluk egyenlő és AT (belső) szögfelezőjük ugyancsak közös (1. ábra). Az 1123. feladatban[1] láttuk, hogy a háromszög ebből az adathármasból egyértelműen megszerkeszthető, így a két háromszög egybevágó. A BD oldal B végpontjának a vele egyenlő CE oldal végpontjai közül nem felelhet meg E, mert ebből $AB = AE$ és $AC = AD$ következnék, és T határozatlan. Ezért B megfelelője C, így pedig $AB = AC$ (és egyszersmind $AD = AE$, a D, E pontpár felcserélhető a B, C pontpárral).

Ha D és E mindegyike az AC, ill. AB oldal A-n túli meghosszabbításán van, akkor a feltevés második részét csak így vehetjük át: a BD és CE *egyenesek* T metszéspontja rajta van a BAC szögfelező *egyenesén*. Így $AD \neq AB$ és $AE \neq AC$, különben ugyanis pl. az ABD háromszög egyenlő szárú, és BD párhuzamos a BAD szög külső szögének, a BAC szögnek felezőjével, tehát T nem jön létre. Feltehetjük, hogy $AD > AB$ (3. ábra); így T nyilvánvalóan BD-nek B-n túli meghosszabbításán, vagyis a BAC szög fent használt felezőjén van, ezért fennáll $AE > AC$ is. Ha ugyanis az állítást erre az esetre bebizonyítottuk, akkor az $AD < AB$ (és $AE < AC$) eset erre visszavezethető úgy, hogy B, C, D, E helyett rendre D, E, B, C-t írunk.

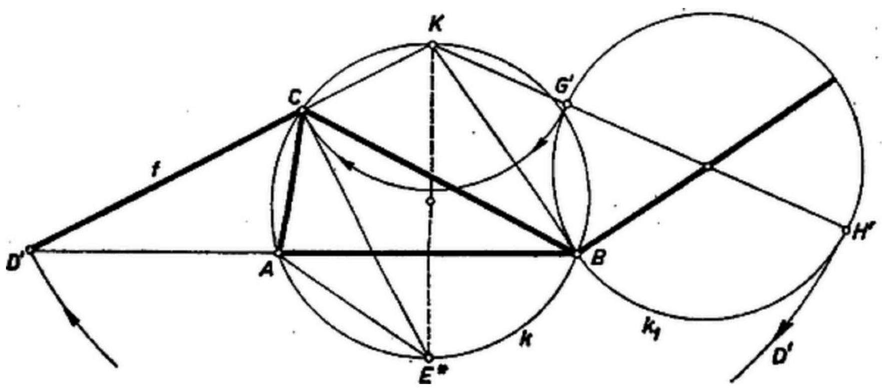
Feltevéseink szerint az ABD és ACE háromszögek A-nál levő szögei egyenlők, mert csúcsszögek, velük a szemben levő BD és CE oldalak egyenlők, és az A-nál levő (közös) külső szögük felezőjének A és a szemben levő oldal egyenese közötti AT szakasza közös. A bizonyításnak az eredeti eset mintájára való befejezéséhez elég azt belátnunk, hogy a háromszöget egy oldala, a szemben levő szöge és e szög külső szöge felezőjének a csúcs és az oldal egyenese közti szakasza egyértelműen meghatározzák.

Valóban, az 1123. feladat I. megoldásának gondolatmenetét lényegében megismételve és az 5. ábra ugyanonnan átvett jelöléseivel az ACB szög külső szögének CD' felezője átmegy K-n, mert merőleges CE-re, így $BCK\sphericalangle = BAK\sphericalangle = D'BK\sphericalangle$, továbbá $BKC\sphericalangle = D'KB\sphericalangle$, $KBC\triangle \sim KD'B\triangle$, $KC : KB = KB : KD'$, $CD' = f$ jelöléssel

[1]K.M.L. 24 (1962/5) 201. o.

$KC(KC+f)=KB^2$, tehát az AB-ből és az ACB szögből kiadódó k-ban egyértelműen megszerkeszthető K és hozzá viszonyítva C helyzete (pl. az idézett megoldás mintájára szerkesztett k_1 segédkör és a G' pont felhasználásával). – Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Corradi Gábor (Győr, Czuczor G. Gimn. III. o. t.)



5. ábra

Megjegyzés: A bebizonyított tétel egy speciális esete az, ha BD felezi a CBA szöget, ezért T a beírt kör középpontja, tehát CE is szögfelező, éspedig a BCA szögben. Eszerint bebizonyításaink magukban foglalják az 1159. feladat II. megoldása utáni 1. megjegyzésben[2] említett tétel fordított állításának bizonyítását. Ezt az állítást magában így is kimondhatjuk: ha egy háromszög két (belső) szögfelezője egyenlő, akkor a megfelezett szögek is egyenlők.

Az 1158. feladat példája (a két ***külső*** szögfelező egyenlősége) nem áll ellentétben feladatunk állításának második részével, mert a két egyenlő szögfelező szakasz egyikének végpontja egy belső szög szárán van, a másiké pedig az azt kiegészítő külső szög szárán.

[2]K.M.L. 25 (1962/11) 122. o.