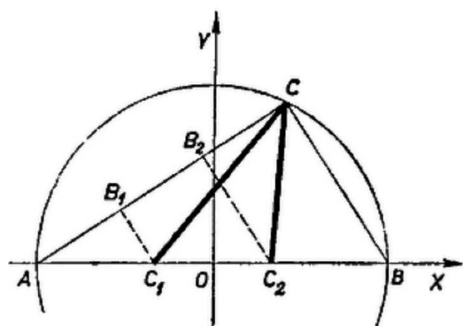
Legyenek az ABC derékszögű háromszög AB átfogójának harmadoló pontjai C_1 és C_2, úgy, hogy $AC_1 = C_1C_2 = C_2B$, ezek vetülete az AC befogón B_1, B_2 végül $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Nyilvánvaló, hogy $AB_1 = B_1B_2 = B_2C = b/3$, $C_1B_1 = a/3$, $C_2B_2 = 2a/3$ így a CC_1B_1 és CC_2B_2 derékszögű háromszögekből

$$CC_1 + CC_2 = \frac{1}{3}\sqrt{a^2+4b^2} + \frac{1}{3}\sqrt{4a^2+b^2} = q. \tag{1}$$



Ebből eltávolítjuk a négyzetgyököket. Négyzetre emeléssel

$$5a^2 + 5b^2 + 2\sqrt{(a^2+4b^2)(4a^2+b^2)} = 9q^2,$$

átrendezéssel és újabb négyzetre emeléssel

$$16(a^4+b^4) + 68a^2b^2 = 81q^4 - 90q^2(a^2+b^2) + 25(a^4+b^4) + 50a^2b^2,$$

$$a^4 + b^4 - 2a^2b^2 - 10q^2(a^2+b^2) + 9q^4 = 0. \tag{2}$$

Itt az első három tag $a^2 - b^2$-nek a négyzete, ami

$$a + b = p \tag{3}$$

felhasználásával így alakítható át:

$$a^4 + b^4 - 2a^2b^2 = (a^2-b^2)^2 = (a+b)^2(a-b)^2 =$$
$$= p^2(a^2+b^2-2ab) = p^2\left[(a+b)^2 - 4ab\right] = p^4 - 4p^2ab.$$

Ezt (2)-be helyettesítve és a negyedik tagban $a^2 + b^2$ helyébe (3) alapján $p^2 - 2ab$-t írva ab-re nyerünk elsőfokú egyenletet:

$$p^4 - 4p^2ab + 20q^2ab - 10p^2q^2 + 9q^4 = 0.$$

Innen

$$ab = \frac{p^4 - 10p^2q^2 + 9q^4}{4(p^2-5q^2)} = \frac{(p^2-q^2)(p^2-9q^2)}{4(p^2-5q^2)}, \tag{4}$$

és a keresett átfogóra (3) alapján

$$c^2 = a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = p^2 - \frac{(p^2-q^2)(p^2-9q^2)}{2(p^2-5q^2)} =$$
$$= \frac{2p^4 - 10q^2p^2 - p^4 + 10p^2q^2 - 9q^4}{2(p^2-5q^2)},$$

$$c^2 = \frac{p^4 - 9q^4}{2(p^2-5q^2)}. \tag{5}$$

Ha ez az érték pozitív, ennek a pozitív négyzetgyöke lehet csak az átfogó hossza. Miután azonban a (2) egyenlethez kétszeri négyzetre emelés útján jutottunk, lehetséges, hogy ezt olyan a, b értékek is kielégítik, amelyek (1)-et nem elégítik ki. Meg kell tehát vizsgálnunk, milyen p, q értékekre van (3), (4)-et kielégítő pozitív valós a és b, és teljesül-e azokra (1) is.

A (3), (4) összefüggések alapján a és b a

$$t^2 - pt + \frac{(p^2-q^2)(p^2-9q^2)}{4(p^2-5q^2)} = 0 \tag{6}$$

egyenlet két gyöke. Ennek akkor és csak akkor van (valós) gyöke, ha diszkriminánsa nem negatív:

$$p^2 - \frac{(p^2-q^2)(p^2-9q^2)}{(p^2-5q^2)} = \frac{q^2(5p^2-9q^2)}{p^2-5q^2} \geqq 0. \tag{7}$$

A következők állapíthatók meg p és q nagyságviszonyáról: A CC_1B_1 és CC_2B_2 derékszögű háromszögekből egyrészt

$$CC_1 < CB_1 + B_1C_1 = \frac{a+2b}{3}, \qquad \text{ugyanígy } CC_2 < \frac{2a+b}{3},$$

és ezekből összeadással

$$q < a + b = p. \tag{8}$$

Másrészt

$$CC_1 > CB_1 = \frac{2b}{3}, \qquad CC_1 > C_1B_1 = \frac{a}{3}, \qquad CC_2 > \frac{b}{3}, \qquad CC_2 > \frac{2a}{3}$$

összeadásával

$$2q > a + b = p. \tag{9}$$

Ha ezek teljesülnek, (7) nevezője (9) szerint negatív, tehát számlálója nem lehet pozitív:

$$5p^2 - 9q^2 \leqq 0, \qquad p \leqq q\sqrt{9/5} = q\sqrt{1{,}8}. \tag{10}$$

Ez a (9)-belinél kisebb felső korlátot szab meg a p/q hányadosra.

Ezek mellett a feltételek mellett az a-ra és b-re adódó értékek akkor pozitívak – mivel összegük, p, pozitív –, ha szorzatuk, (4) jobb oldala is pozitív. Ez azonban teljesül, mert a számláló első tényezője (8) szerint pozitív, a második tényező és a nevező (10) szerint negatív. Ekkor a c^2-re nyert érték, mint két pozitív érték négyzetének összege, pozitív (ami a nyert kifejezésről közvetlenül is belátható). Ezek szerint akkor kapunk megoldást, ha

$$q < p < q\sqrt{1{,}8}.$$

(Látjuk, hogy nem lett volna elég a c^2-re kapott kifejezés pozitív voltát előírnunk. Abból ugyanis (8)-ra tekintettel $p < q\sqrt{3}$ adódnék, és így lehetséges volna, hogy c^2 pozitív, viszont a és b nem valósak.)

Pernek Tibor (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. IV. o. t.)

Megjegyzés. Az (5) eredményhez koordináta-geometriai meggondolással is eljuthatunk. Vegyük X-tengelynek az AB egyenest, origónak az AB szakasz felezőpontját, így A, C_1, C_2, B abszcisszája rendre $-c/2$, $-c/6$, $c/6$, $c/2$. A keresett c-re abból kapunk egyenletet, hogy a derékszög C csúcsa három vonalon van rajta: az origó körül $c/2$ sugárral irt (Thalész-) körön, azon az ellipszisen, amelynek fókusza C_1 és C_2, nagy tengelye q, és azon is, amelyiknek A és B a fókusza, nagy tengelye p. Így az ellipszisek kis tengelye fele hosszának négyzete

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{c}{6}\right)^2, \qquad \text{ill.} \qquad \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2.$$

Az ellipszisek

$$\frac{9q^2-c^2}{36}x^2 + \frac{q^2}{4}y^2 = \frac{q^2(9q^2-c^2)}{144}, \qquad \text{ill.} \qquad \frac{p^2-c^2}{4}x^2 + \frac{p^2}{4}y^2 = \frac{p^2(p^2-c^2)}{16}$$

egyenletéből x^2-et és y^2-et kifejezve, majd a Thalész-kör

$$x^2 + y^2 = \frac{c^2}{4}$$

egyenletébe helyettesítve c^2-re (hiányos) másodfokú egyenletet kapunk, annak 0-tól különböző gyöke azonos (5)-tel.

Gyárfás András (Budapest, Toldy F. g. IV. o. t.)