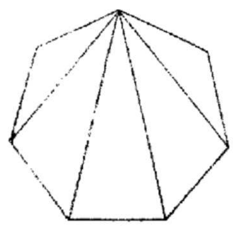
I. megoldás. Minden felbontásban 4 átló szerepel, mert az 5 háromszög 15 oldala közül 7 a hétszögnek is oldala, a maradó 8 oldalt átlók alkotják, és minden átló két háromszögnek oldala. Az átlók 8 végpontja csúcsa a hétszögnek, tehát legalább egy csúcsból legalább 2 átló indul; másrészt egy csúcsból legfeljebb 4 átló húzható.

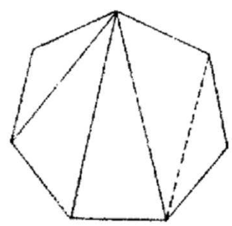
Hétszögünk szabályos voltára tekintettel bármely két felbontást azonosnak tekintünk, ha a hétszög valamely szimmetriájával egymásba átvihetők. Nevezzük egy felbontásban 4-ágú csomónak (ill. 3-, 2-, 1-, 0-ágú csomónak) a hétszög minden olyan csúcsát, melyből pontosan 4 (ill. 3, 2, 1, 0) a felbontásban felhasznált átló indul ki, és képezzük a felbontásokat legtöbb ágú csomójuk csökkenő rendjében.

Egy csúcsból minden átlót meghúzva – vagyis 4-ágú csomót képezve – egy kívánt felbontást kapunk, és elforgatástól eltekintve csak egy ilyen van (1. ábra).

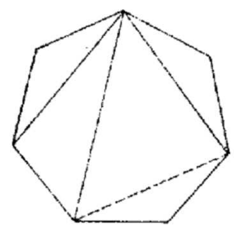
Ha egy csomót 3-ágúvá akarunk kialakítani (ilyenkor természetesen nincs 4-ágú csomó), akkor a képezést kétféleképpen kezdhetjük: a kiszemelt csúcsból kiinduló 4 átló közül vagy egyik szélsőt nem használjuk (vagyis a második csúcsba vezető, rövidebb átlót, 2. ábra), vagy egyik belsőt (a harmadik csúcsba vezetőt, a hosszabbat, 3. ábra). Ezzel azonban a felbontás meg is van határozva, ez a 3 átló a hétszöget 3 háromszögre és 1 négyszögre bontja, és a négyszög átlói közül csak azt használhatjuk a kettévágáshoz, amelynek a 3-ágú csomó nem végpontja (az ábrákon szaggatva). Így a felbontásban egy, ill. két 2-ágú csomó keletkezik.



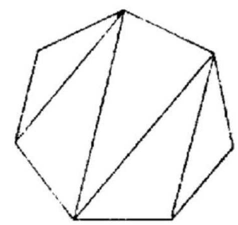
1. ábra



2. ábra



3. ábra



4. ábra

Végül ha még 3-ágú csomót sem engedünk meg, akkor bármelyik kétágú csomóból kifutó két átló a hétszögnek két szomszédos csúcsába vezet. Ugyanis az ellentétes esetben a hétszögnek a köztük levő része négyszög, vagy ötszög, ennek felbontására a két átló szabad végpontjait összekötő átlót harmadik vágás gyanánt fel kell használnunk. Így a még egyben maradt négyszög két szomszédos csúcsa máris 2-ágú csomó, ezért bármelyik átlója menti kettévágásával 3-ágú csomó keletkezik. Mármost az elsőnek megválasztott 2-ágú csomóból akár a 2 hosszabb átlót indítjuk, akár 1 hosszút és a szomszédos rövidet, továbbfejlesztéssel mindig a 4. ábra felbontásához jutunk.

Ezek szerint a felbontások száma 4.

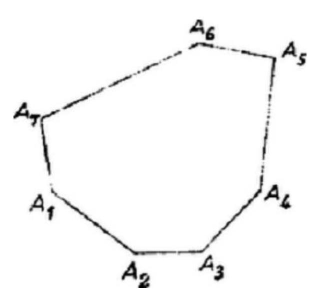
Veres Ferenc (Miskolc, Kilián Gy. g. III. o. t.)

Megjegyzés. Sokan a tengelyes tükrözéssel és forgatással egymásba átvihető felbontásokat különbözőknek tekintették, és így 42 felbontást adtak meg eredmény gyanánt. Valóban, így a 2. és 3. ábra egyenként $2 \cdot 7$ felbontást ad, az 1. és 4. ábra pedig 7-et-7-et, ezek ugyanis tengelyesen szimmetrikusak.

II. megoldás. Először egy tetszés szerinti

$$A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$$

konvex hétszög felbontásainak számát állapítjuk meg (5. ábra) és ezt F_7-tel jelöljük. Csoportosítsuk a felbontásokat aszerint, hogy az A_1A_2 oldalt tartalmazó háromszög harmadik csúcsa A_3, A_4, A_5, A_6, ill. A_7.



5. ábra

Az első esetben az $A_1A_2A_3$ háromszög mellett az $A_1A_3A_4A_5A_6A_7$ konvex hatszög keletkezik, ilyen felbontás tehát annyi van, ahányféleképpen egy konvex hatszöget lehet egymást nem metsző átlókkal háromszögekre bontani. Jelöljük ezt a számot F_6-tal.

Első háromszögünknek $A_1A_2A_4$-et véve, ennek egyik oldalán az $A_2A_3A_4$ háromszög keletkezik, másik oldalán az $A_1A_4A_5A_6A_7$ konvex ötszög. Ilyen felbontás tehát F_5 számú van, így jelölve egy ötszög megfelelő felbontásainak számát.

Az $A_1A_2A_5$ háromszögből kiindulva további feladatunk az $A_2A_3A_4A_5$ és $A_1A_5A_6A_7$ konvex négyszögek felbontása. Mindegyiké külön $F_4 = 2$-féleképpen lehetséges. És mivel az első négyszög bármelyik felbontása a másodiknak bármelyik felbontásával összekapcsolható, azért az $A_1A_2A_5$ háromszöget tartalmazó felbontások száma $F_4 \cdot F_4 = 4$.

Az $A_1A_2A_6$ és $A_1A_2A_7$ háromszögekből kiindulva a második, ill. első vizsgált esettől csak betűzésben különböző esetre jutunk.

Nyilvánvaló, hogy így minden felbontást pontosan egyszer számbavettünk, ezért

$$F_7 = F_6 + F_5 + F_4 \cdot F_4 + F_5 + F_6. \tag{1}$$

Ezzel a feladatot visszavezettük F_6 és F_5 megállapítására. Ezt a fenti meggondolásnak egyre kisebb oldalszám mellett való megismétlésével kaphatjuk. Nyilvánvaló azonban, hogy meggondolásunk nagyobb oldalszám mellett is használható és eredménye így írható:

$$F_n = F_{n-1} + F_3 \cdot F_{n-2} + F_4 \cdot F_{n-3} + \ldots + F_{n-3} \cdot F_4 + F_{n-2} \cdot F_3 + F_{n-1}. \tag{2}$$

A második tagba és az utolsó előttibe is tényezőül felvett F_3 értéke természetesen 1, ezt a kiegészítést a többi közbülső tag szerkezetével való azonosság kidomborítása végett alkalmaztuk.

Minthogy $F_4 = 2$, azért képletünkkel

$$F_5 = F_4 + F_3 \cdot F_3 + F_4 = 5,$$
$$F_6 = F_5 + F_4 \cdot F_3 + F_3 \cdot F_4 + F_5 = 14,$$

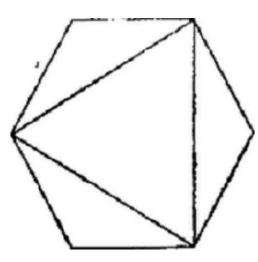
és így (1)-ből $F_7 = 42$.

Szabályos 7-szög (általában n-szög) bármelyik csúcsa bármelyik másiknak a helyére forgatható úgy, hogy ugyanakkor minden más csúcs is egy másik csúcs helyére jut, így a fenti 42 felbontás 7-esével azonos, tehát legfeljebb 6 különböző. Köztük még vannak tükrös párok.

Az A_5 csúcson átmenő szimmetriatengelyre tükrös megoldásban szerepel az $A_1A_2A_5$ egyenlő szárú háromszög, a két oldalán létrejövő négyszögek egyikét F_4-féleképpen bonthatjuk, ez a másik felbontását is megadja, tehát a tengelyesen tükrös felbontások száma 2. A nem egybevágó felbontások száma $6 - 2 = 4$.

Nárai György (Budapest, Bem J. g. IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. Általában a tengelyesen tükrös, nem egybevágó felbontások száma a szabályos $(2n+1)$-szög esetén a fentihez hasonlóan F_{n+1}, – természetesen $n \geqq 2$. Általános megállapítások kimondásában azonban óvatosságot ajánlunk versenyzőinknek. Ez a szám a szabályos $2n$-szög esetében csupán $F_{n+1}/2$. Ugyanis az előbbi egyenlő szárú háromszög helyén egy leghosszabb átló, szimmetriatengely áll, és erre merőleges szimmetriatengely is van. – Az sem helyes, hogy bármely szabályos n-szög egymásba forgással át nem vihető felbontásainak száma F_n/n. Ez a hányados mindjárt $n = 6, 8, 9$ esetén nem is egész szám. Ha ugyanis n nem prímszám, akkor lehetségesek önmagukkal fedésbe forgatható felbontások, pl. a szabályos hatszögnek az a felbontása, melyben három egymáshoz a végpontjukkal csatlakozó rövidebb átlót használunk fel (6. ábra).



6. ábra

2. Az alábbiakban F_n-re a (2)-nél egyszerűbb kifejezést állítunk elő. A (2) jobb oldalán álló $F_3 \cdot F_{n-2}$, $F_4 \cdot F_{n-3}$, $\ldots$, $F_{n-2} \cdot F_3$ szorzatok – általános alakjuk $F_k \cdot F_{n-k+1}$, ahol $3 \leqq k \leqq n-2$ – sorra a következő kérdésre is megadják a választ: a $B_1B_2 \ldots B_{n-1} = B$ konvex $(n-1)$-szöget feltételünk szerint felbontva a B_1B_3, B_1B_4, $\ldots$, B_1B_{n-2} átló hány felbontásban szerepel?

Előrebocsátjuk, hogy B-t minden felbontás $n-4$ átló felhasználásával $n-3$ háromszögre osztja: a háromszögek összesen $3n-9$ oldalát egyrészt B-nek $n-1$ oldala adja, a maradó $2n-8 = 2(n-4)$ oldalt pedig az $n-4$ átló, a két oldalán álló háromszögek mindegyikével számítva. Mármost a B_1B_k átló meghúzása – itt is $3 \leqq k \leqq n-2$ – az $(n-1)$-szöget ugyanúgy egy k-szögre és egy $(n-k+1)$-szögre osztja, mint az $A_1A_2 \ldots A_n$ n-szöget az $A_1A_2A_{k+1}$ háromszög megrajzolása, tehát a B_1B_k átló $F_k \cdot F_{n-k+1}$ felbontásban szerepel. Így az

$$S = F_3 \cdot F_{n-2} + F_4 \cdot F_{n-3} + \ldots + F_k \cdot F_{n-k+1} + \ldots + F_{n-2} \cdot F_3$$

számban minden olyan felbontás szerepel, melyben van a B_1-ből kiinduló átló, mert sorravettük a B_1-ből kiinduló összes átlókat. Éspedig minden felbontás annyiszor szerepel S-ben, ahány ilyen átló van benne. Hasonlóan végigmenve a B_2, B_3, $\ldots$, B_{n-1} csúcsokból kiinduló összes átlókon, $(n-1)S$ felbontást számláltunk meg. Ebben a számban már B minden felbontása ugyanannyiszor szerepel, éspedig $2(n-4)$-szer, mert minden felbontást a benne felhasznált $n-4$ átló mindegyikével számbavettünk, éspedig 2-szer, az átlót az egyik, majd a másik végpontjából meghúzva. B felbontásainak száma F_{n-1}, így

$$(n-1)S=2(n-4)F_{n-1}, \qquad S=\frac{2(n-4)}{n-1}\cdot F_{n-1},$$

ennélfogva (2)-ből

$$F_n=2F_{n-1}+S=\frac{2(2n-5)}{n-1}\cdot F_{n-1}.$$

Ezt a képletet n helyén egymás után $n-1$-gyel, $n-2$-vel, $\ldots$ utoljára 4-gyel alkalmazva, végül beírva, hogy $F_3=1$, adódik:

$$F_n=\frac{2(2n-5)}{n-1}\cdot\frac{2(2n-7)}{n-2}\cdot F_{n-2}=\frac{2^2(2n-5)(2n-7)}{(n-1)(n-2)}\cdot\frac{2(2n-9)}{n-3}\cdot F_{n-3}=$$
$$=\ldots=\frac{2^{n-3}(2n-5)(2n-7)(2n-9)\ldots 5\cdot 3}{(n-1)(n-2)\ldots 4\cdot 3}.$$

Végül bővítéssel, a faktoriális, majd pedig a binomiális együttható jelölésével F_n így is írható:

$$F_n=\frac{2^{n-2}}{(n-1)!}\cdot\frac{(2n-5)(2n-6)(2n-7)\ldots 4\cdot 3\cdot 2}{2(n-3)\cdot 2(n-4)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 1}=$$
$$=\frac{2\cdot(2n-5)!}{(n-1)!(n-3)!}=\frac{1}{n-2}\binom{2n-4}{n-3}.$$

Ezeket a végeredményeket néhány versenyző az irodalomban megtalálta és (bizonyítás nélkül) közölte.