

Ha n pozitív egész, akkor a 10^n szám a legkisebb $n + 1$ -jegyű természetes szám, $10^n - 1$ pedig a legnagyobb n -jegyű természetes szám, valamennyi jegye 9-es. $n = 1, 2, 3$ esetén az állítás igaz, a $9 : 37, 99 : 37, 999 : 37$ osztások maradéka rendre 9, 25, 0, és ezek négyzetszámok. Abból, hogy a harmadik osztás maradéka 0, következik, hogy 3-nál nagyobb n -et véve az első három 9-es nem befolyásolhatja a további 9-esekkel írt szám osztásából adódó maradékot. Ezért $n = 4, 5$ és 6-ra a maradék rendre ugyanaz, mint $n = 1, 2, 3$ -ra, továbbá n értékét egyesével növelve állandóan ez a három maradék ismétlődik.

Valóban, ha $n > 3$, vagyis $n - 3 > 0$, természetes szám, akkor

$$\begin{aligned} 10^n - 1 &= (10^n - 10^{n-3}) + (10^{n-3} - 1) = 10^{n-3}(10^3 - 1) + \\ &+ (10^{n-3} - 1) = 37 \cdot 27 \cdot 10^{n-3} + (10^{n-3} - 1), \end{aligned}$$

az első tag osztható 37-tel, tehát a $(10^n - 1) : 37$ osztás maradéka egyenlő a második tag, $10^{n-3} - 1$ osztásánál fellépő maradékkal.

Ezek szerint n bármely pozitív egész értékre a maradék vagy 9, vagy 25, vagy 0, minden esetre négyzetszám.

Sófalvi Mihály (Budapest, Bláthy O. techn. III. o. t.)

Megjegyzés. Néhány dolgozat tizedes jegyeket is tekintetbe vett a hányadosban, és így hibásnak találta az állítást. Egész számok közti maradékos osztáson az osztónál kisebb pozitív egész maradékkal végzett osztást szokás érteni. A „négyzetszám” megjelölésen is egész szám négyzetét értjük. Ha tizedes jegyeket is számítunk, akkor teljesen önkényes, hogy hányadik jegynél állunk meg, tehát a maradék is határozatlanná válik.