

A feladat feltétele csak akkor teljesülhet, ha $n \geq 3$. Az n ponthoz GALLAI tétele szerint van legalább egy e egyenes, amely közülük éppen két ponton megy keresztül; legyen ezek egyike a P pont. Ha a P -től különböző pontok mind egy f egyenesen vannak, akkor az ezeket P -vel összekötő egyenesek $n - 1$ különböző egyenest adnak és hozzájuk véve f -et n egyenest kapunk. Ebben az esetben tehát teljesül a feladat állítása.

Ha a P -től különböző $n - 1$ pont nincs egy egyenesen, akkor hagyjuk el P -t. Ezzel a legalább két adott ponton átmenő egyenesek száma is legalább eggyel csökkent, mert e a maradó pontok közül csak egyen megy át.

Ezt az eljárást mindaddig ismételtethetjük, míg valamelyik lépés után olyan pontra találunk, amelyik kivételével a többi megmaradt pont (legalább kettő) egy egyenesen van. Ha ez a k -adik lépés után következett be, akkor k pontot hagyunk el, ezzel legalább k olyan egyenest is, amelyik az adott n pont közül legalább kettőn átmege; a megmaradó $n - k$ pont nincs egy egyenesen (így a $n - k \geq 3$), de egy olyan pontra akadtunk, amelynek elhagyásával a maradó $n - k - 1$ pont egy egyenesen van. Ekkor az $n - k$ pont $n - k$ egyenest határoz meg és legalább k -t elhagytunk, tehát az eredetileg adott n ponthoz legalább $n - k + k = n$ olyan egyenes van, amelyek mindegyike legalább két adott ponton megy át. Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

Csűrös Miklós (Nagykőrös, Arany J. g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. A bizonyítás lényegében a teljes indukció módszerével történt, ha nem is így fogalmaztuk. Nem helyesen jártak azonban el azok, akik az e egyenes P pontjának elhagyása után nem gondoltak arra, hogy a maradó $n - 1$ pont egy egyenesen lehet. Az minden esetre igaz, hogy az e -n levő két adott pontnak legalább az egyike nincs a többi $n - 2$ -vel egy egyenesen ha $n \geq 4$, s így a másikat választva P -nek már alkalmazható az indukciós feltevés, de akkor ez a megjegyzés kell a következtetés korrekté tételéhez. Az ilyen megoldások hiányosak.

2. Gyakori volt ez a hibás állítás is: „Az adott pontokhoz egy új pontot hozzávéve legalább egy új egyenes is keletkezik.” Ha pl. az összes pontok két egyenesen helyezkednek el úgy, hogy mindegyik egyenesen legalább két pont van, és az egyenesek metszéspontja nem tartozik közéjük, akkor ezt a metszéspontot hozzájuk véve nem keletkezik új egyenes. (Ugyanez a helyzet, ha egy ponton átmenő több egyenesen vannak adva a metszésponttól különböző pontok.