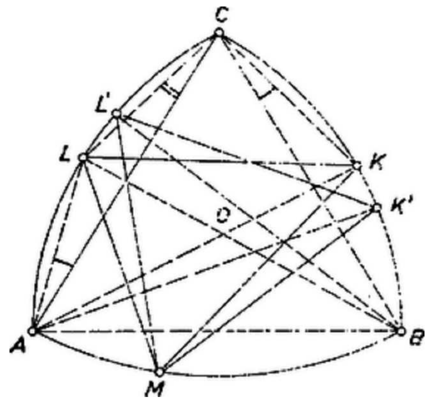
1. Elég belátnunk, hogy a BC, CA, ill. AB körívből vett BK, CL, ill. AM rész-ívek egyenlők. Így ugyanis az ABC háromszög O középpontja körüli bármelyik irányú 120°-os forgás az AB, BC, CA ívekkel együtt a KLM egyenlő oldalú háromszög csúcsait is egymásba viszi át, tehát O egyszersmind a KLM háromszögnek is középpontja.



1. ábra

Mérjük rá evégett az AM ívet a BC és a CA ívre B-től, ill. C-től, és legyen a végpont K', ill. L'; így azt kell belátnunk, hogy $K' \equiv K$ és $L' \equiv L$. Az $MK'L'$ háromszög szabályos, mert a mondott forgások önmagába viszik át.[1] Ha K' nem azonos K-val, akkor a BC íven B-től C-ig haladva vagy előzi K-t, vagy követi. Továbbmenve a CA íven A-ig, L' ugyanúgy előzi vagy követi L-t, mert a BC, CA ívpárt befutó ponthoz M-ből húzott látósugár végig egy irányban fordul el M körül, másrészt viszont a $K'ML'\sphericalangle = 60° = KML\sphericalangle$. Ha már most a BK' ív kisebb a BK ívnél, akkor

$$MK' < MK,$$

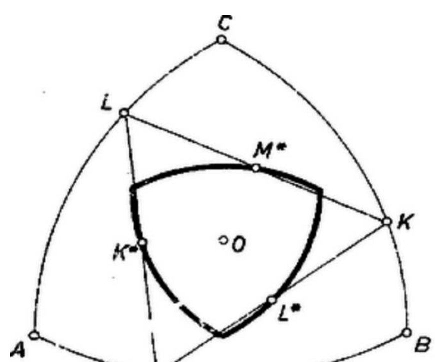
mert a KK' szakasz felező merőlegese átmegy A-n, M pedig ugyanarra a partjára esik, mint K'. Hasonlóan adódik

$$ML' > ML.$$

E két, egyenlőtlenség azonban együtt nem teljesülhet, mert a megfelelő oldalakon egyenlő szakaszok állnak.

Ugyanígy a $BK' > BK$ feltevés is ellentmondásra vezet. Ezek szerint K' nem lehet K-tól különböző, egyszersmind L' is azonos L-lel, ebből pedig – mint láttuk – az állítás első része következik.

2. Azt kell megmutatnunk, hogy a KCL szög, vagyis a KCB, BCA és ACL szögek összege, 90°-kal egyenlő, más szóval, hogy $KCB\sphericalangle + ACL\sphericalangle = 30°$. Az előbbi a (rövidebb) KB köríven nyugvó kerületi szög, az utóbbi egy ugyanakkora sugarú kör AL ívén nyugszik. Mivel beláttuk, hogy utóbbi egyenlő a CL ívvel, ez pedig KB-vel együtt egy hatod kört alkot, így a rajtuk nyugvó kerületi szögek összege 180° hatodrészével, 30°-kal egyenlő, az állításnak megfelelően.



2. ábra

3. Legyenek a KLM háromszög oldalainak felezőpontjai rendre M^*, K^*, L^*. Az ezekkel meghatározott (szabályos) háromszög hasonló helyzetű az MKL háromszöghöz, az MM^*, KK^*, LL^* egyenesek közös pontjára, az MKL háromszög O középpontjára nézve, ennélfogva az B^*, K^*, L^* pontok mértani helye hasonló az M, K, L pontok mértani helyéhez, az AB, BC, CA ívek együtteséhez. (A hasonlóság aránya 1: 2.) Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Gerencsér László (Budapest, Rákóczi F. g.)

[1] Lásd 1167. feladat, K.M.L. 26 (1963/1) 21. old.