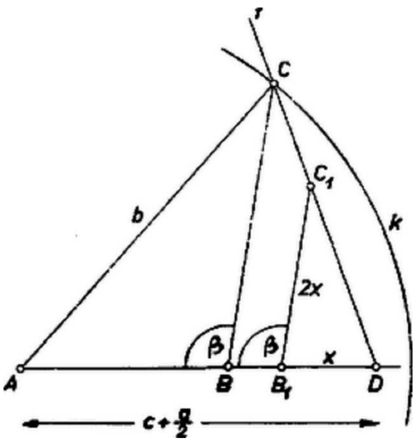
I. megoldás. Legyen a keresett háromszög ABC, mérjük rá a $BC = a$ oldal felét az $AB = c$ oldal B-n túli meghosszabbítására és legyen a végpont D. A BCD háromszögben ismerjük a $DBC\sphericalangle = 180° - \beta$ szöget és az ezt bezáró oldalak arányát: $BD : BC = 1 : 2$, így hozzá hasonló háromszöget könnyen szerkeszthetünk, és abból a kiegészített ábrát is megszerkeszthetjük, pl. a következő módon: Egy $c+a/2$ hosszúságú AD szakasz belsejében levő B_1 ponttal, mint csúccsal, mérjük fel β-t úgy, hogy egyik szára B_1A legyen, és mérjük fel a másik szárra a $B_1C_1 = 2B_1D$ szakaszt (1. ábra). A C pontot a $DC_1 = f$ félegyenesből az A körüli b sugarú k körrel metszhetjük ki, B-t pedig az AD szakaszból a C-n át C_1B_1-gyel párhuzamosan húzott egyenessel. Nyilvánvaló, hogy a kapott háromszög megfelel a feltételeknek.

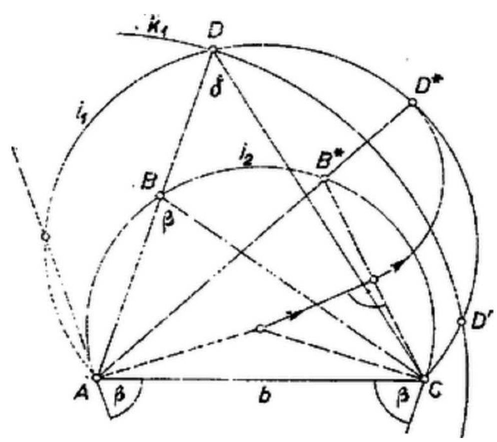


1. ábra

f és k (D-től különböző) metszéspontjainak száma 0, 1, 2, aszerint, hogy k nem metszi f-ot, ill. éppen érinti, ill. 2 pontban metszi, végül ismét 1 akkor, ha $b \geqq c+a/2$, mert így a második metszés C_1D-nek D-n túli meghosszabbítására esnék. Amennyiben az ADC_1 szög tompaszögnek adódik, akkor nem lehet 1-nél több megoldás. Másrészt a megoldások számát az is csökkentheti, ha az f-en kiadódott, D-től különböző C-n át a mondott párhuzamost meghúzva, ez DA-t A-ban, vagy az A-n túli meghosszabbításon metszi.

Pázmándi László (Budapest, József A. g.)

Megjegyzés: Könnyű belátni, hogy $\beta = 120°$ mellett $ADC_1\sphericalangle < 90°$, és nyilván $\beta > 120°$ mellett lesz $ADC_1\sphericalangle > 90°$.



2. ábra

II. megoldás. Az előző megoldásban szereplő kiegészített ábrát a következő módon is megszerkeszthetjük. Szerkesztünk egy háromszöget, amelynek egyik szöge $180° - \beta$, és az ezt bezáró két oldal egyike a másik kétszerese (az előző megoldás B_1C_1D háromszöge, 2. ábra). A kétszeres oldallal szemközti δ szög akkora, amekkora alatt az $AC = b$ hosszúságú oldal D-ből látszik. Ezért az ACD háromszöget megszerkeszthetjük úgy, hogy egy b hosszúságú AC szakasz fölé egyik oldalán δ látószögű i_1 körívet szerkesztünk. Ebből az A körül $c + a/2$ sugárral rajzolt k_1 kör metszi ki D-t (1, 2, vagy 0 metszéspont lehet). B-t AD-ből pl. az AC fölött β látószögű i_2 körívvel metszhetjük ki.

A szerkesztés egy célszerű végrehajtása: az $AC = b$ szakaszhoz β nyílású i_2 látószög körívet szerkesztünk (elég az egyik oldalán), legyen ennek tetszés szerinti (belső) pontja B^*. AB^*-nak B^*-on túli meghosszabbítására rámérjük a B^*C szakasz felével egyenlő B^*D^* szakaszt, ekkor i_1 az ACD^* háromszög körülírt körének a D^*-ot tartalmazó AC íve. A fenti k_1 kör i_1-ből kimetszi D-t, és a DA szakasz i_2 -ből B-t. (Így az i_2 körívet kétszer használtuk fel.)

i_2 mindig az i_1-gyel és az AC húrral határolt körszeletben van, mert $\beta = \delta + BCD\sphericalangle > \delta$. – Legfeljebb annyi megoldás van, amennyi az i_1 és k_1 közös pontjainak száma (C természetesen nem fogadható el D gyanánt). Előfordulhat, hogy D előáll, de nem tartozik hozzá B, ti. akkor, ha D az i_2-höz A-ban húzott érintőnek i_2-t nem tartalmazó partján adódik, vagy ezen az érintőit magán. Ha a fenti δ tompaszög, akkor i_1 kisebb félkörnél, így bármely az egyik végpontja körül irt kör legfeljebb egy pontban metszi.

Lehel Csaba (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g.)

Megjegyzés. Több versenyző bonyolult számítások alapján végezte el a szerkesztést. A fenti megoldásokhoz a megoldhatóságnak, ill. a megoldások különböző számának feltételeit geometriai módon adtuk meg, az adatokból felírható egyenlőtlenségek közlését mellőztük.