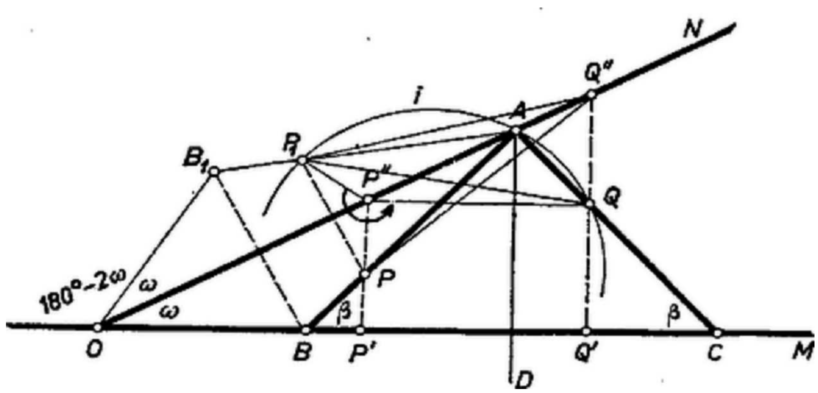
I. megoldás. Legyen az adott szög $MON\sphericalangle = \omega < 90°$, a feltételnek megfelelő ABC egyenlő szárú háromszög BC alapja legyen az OM száron, B közelebb O-hoz, az A csúcs az ON száron; az AB száron fekvő adott pont legyen P, az AC-n fekvő Q.



1. ábra

A háromszög egyenlő szárú voltából következik, hogy $\beta = ABC\sphericalangle = ACB\sphericalangle$ és $OBA\sphericalangle = 180° - \beta$. Ábránkat úgy alakíthatjuk át, hogy az utóbbi két szög, melyek összege 180°, egy négyszög két szögébe menjen át, s így a másik két szög között is összefüggést állapíthatunk meg. Tükrözzük B-t AO-ra, legyen a tükörképe B_1. Ekkor az AB_1OC négyszög C-nél, O-nál, ill. B_1-nél levő szöge β, 2ω, ill. $180° - \beta$ s így az A-nál levő szög $180° - 2\omega$, ami az adatokból megszerkeszthető. Ennek a szögnek AC szára átmegy Q-n, az AB_1 szár pedig átmegy P-nek az OA-ra vonatkozó P_1 tükörképén.

Ezek szerint A-t ON-ből a P_1Q szakasz fölé írt $180° - 2\omega$ nyílású i látószögkörív metszi ki, B-t és C-t pedig AP, ill. AQ metszi ki OM-ből.

Az ABC háromszög megfelel a követelményeknek, mert a PAQ szög felezőjének egy pontját D-vel jelölve

$$DAO\sphericalangle = PAO\sphericalangle + \frac{QAP\sphericalangle}{2} = \frac{PAO\sphericalangle + (PAO\sphericalangle + QAP\sphericalangle)}{2} =$$
$$= \frac{P_1AO\sphericalangle + QAO\sphericalangle}{2} = \frac{P_1AQ\sphericalangle}{2} = 90° - \omega,$$

tehát $AD \perp OM$, vagyis $AD \perp BC$, az ABC háromszög egyenlő szárú.

ω hegyes szög, ezért a P_1AQ szög 0° és 180° közé esik. Így az i ív a P_1Q egyenesnek O-val ellentétes partján szerkesztendő, ugyanis O benne van a 180°-nál kisebb P_1AQ szög terében. i mindig metszi az ON félegyenest, mert végpontjait ON szétválasztja, ugyanezért mindig pontosan egy metszéspontot kapunk A céljára.

A mindig a P és Q-n át OM-re állított merőlegesnek ON-nel való P'', Q'' metszéspontjai között adódik, tehát mindig megfelelő háromszöget kapunk. Ugyanis P_1Q-nak Q''-ből vett látószöge kisebb a P_1AQ szögnél, P''-ből vett látószöge pedig nagyobb nála. (Az utóbbi esetben azt a szögtartományt értjük a látószögön, amelynek O belső pontja.) Valóban

$$P_1Q''Q\sphericalangle = P_1Q''O\sphericalangle + OQ''Q\sphericalangle = PQ''O\sphericalangle + QQ''O\sphericalangle < 2\,QQ''O\sphericalangle =$$
$$= 2(90° - \omega) = P_1AQ\sphericalangle,$$

mert feltevésünk szerint P benne van az $OQ'Q''$ háromszögben. Másrészt ugyanezért

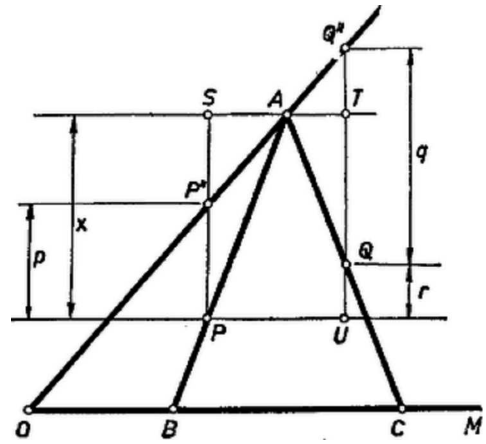
$$P_1P''Q\sphericalangle = P_1P''P\sphericalangle + PP''Q\sphericalangle > P_1P''P\sphericalangle = 2OP''P\sphericalangle = P_1AQ\sphericalangle.$$

Ha P'' egybeesik Q''-vel, vagyis $PQ \perp OM$, akkor egyenlőtlenségeink helyén egyenlőség áll, A azonos P''-vel, a megoldás egyenesszakasszá fajul.

Még egy megoldást kapunk, ha egyenlő szárú háromszögünk alapját az ON száron keressük. Az imént mondott elfajulás csak az egyik esetben következhet be.

Benczúr András (Budapest, Fazekas M. g.)
dolgozatából, a diszkussziót kiegészítve

Sok számolásos megoldás érkezett. Egy ilyet vázolunk, a diszkussziót az olvasóra bízzuk.



2. ábra

II. megoldás. Húzzunk párhuzamost OM-mel A-n és P-n át, legyen P és Q vetülete az előbbin S, ill. T, Q vetülete az utóbbin U. Az APS, AQT és az $AP''S$, $AQ''T$ háromszögpárok nyilvánvaló hasonlóságából:

$$\frac{PS}{QT}=\frac{AS}{AT}=\frac{P''S}{Q''T},$$

ezért $PS=x$, $P''P=p$, $Q''Q=q$, $QU=r$ jelöléssel (r negatív is lehet):

$$\frac{x}{x-r}=\frac{x-p}{q+r-x}, \qquad 2x^2-(p+q+2r)x+pr=0,$$

$$x=\frac{1}{4}(p+q+2r\pm\sqrt{(p+q+2r)^2-8pr}).$$

Sebestyén Zoltán (Celldömölk, Berzsenyi D. g.)