I. megoldás. Feltesszük, hogy az egyenletnek vannak (valós) gyökei, azaz hogy $b^2-4ac \geqq 0$. Azt is feltehetjük, hogy $a>0$, mert ellenkező esetben a bal oldalt a negatívjával helyettesíthetjük. Ekkor a gyökképlet nevezőjében pozitív szám áll, számlálójának abszolút értéke vagy a tagok abszolút értékének összegével egyenlő, vagy kisebb annál (ti. ha egyik tag negatív, a másik pozitív). Eszerint

$$|x| \leqq \frac{|b|+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \tag{2}$$

(A négyzetgyökön a nem negatív gyököt értjük, az tehát egyenlő az abszolút értékével.) Elegendő tehát azt megmutatnunk, hogy

$$\frac{|b|+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \leqq \frac{2|ac|+b^2}{|ab|}=\frac{2a|c|+b^2}{a|b|},$$

másképpen, hogy a jobb és a bal oldal különbsége:

$$\frac{2a|c|+b^2}{a|b|}-\frac{|b|+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{4a|c|+b^2-|b|\cdot\sqrt{b^2-4ac}}{2a|b|} \tag{3}$$

nem negatív. Bővítsük evégett a törtet a

$$4a\cdot|c|+b^2+|b|\cdot\sqrt{b^2-4ac}$$

kifejezéssel. Ez pozitív, mert második tagja pozitív, a másik kettő pedig nem negatív, ezért a nevező pozitív lesz, a számláló pedig

$$\left(4a\cdot|c|+b^2\right)^2-b^2(b^2-4ac)=16a^2c^2+4ab^2\big(2|c|+c\big). \tag{4}$$

Az utóbbi alak szerint egyik tag sem lehet negatív, mert a zárójelben $3|c|$, ill. $|c|$ áll aszerint, hogy c pozitív vagy negatív. Így a bővített tört számlálója nem lehet negatív, tehát a (3) tört sem. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

(2)-ben a nagyobb abszolút értékű gyökre egyenlőség áll fenn, mert a négyzetgyök előjele az egyik gyök esetében megegyezik $-b$ előjelével. Ezért (1)-ben akkor és csak akkor áll egyenlőség, ha (3), és vele (4) értéke 0. Ez nyilván csak $c=0$ mellett következik be. $c\neq 0$ esetében pedig (1)-ben a $<$ jel érvényes.

Fodor János (Miskolc, Földes F. g. IV. o. t.)

II. megoldás. Alakítsuk át (1) jobb oldalát az ismert $b=-a(x_1+x_2)$, $c=ax_1x_2$ összefüggések alapján, továbbá válasszuk a gyökök indexeit úgy, hogy teljesüljön

$$|x_2| \geqq |x_1|. \tag{5}$$ Így az

$$|x_2| \leqq \frac{2|a^2x_1x_2|+a^2(x_1+x_2)^2}{|-a^2(x_1+x_2)|}= \tag{6}$$

$$=\frac{2|x_1x_2|+(x_1+x_2)^2}{|x_1+x_2|}=\frac{2|x_1x_2|}{|x_1+x_2|}+|x_1+x_2|$$

egyenlőtlenséget kell igazolnunk. (A nevező $b\neq 0$ miatt nem 0.)

Ha x_1 és x_2 egyező előjelű, vagy $x_1=0$, (mind a kettő nem lehet 0, mert $b\neq 0$), akkor összegük abszolút értéke egyenlő az abszolút értékeik összegével. Ebben az esetben tehát (6) jobb oldala így írható

$$\frac{2|x_1x_2|}{|x_1+x_2|}+|x_1+x_2|=\frac{2|x_1x_2|}{|x_1+x_2|}+|x_1|+|x_2| \geqq x_2.$$

Ha x_1 és x_2 egyike pozitív, a másik negatív, akkor összegük abszolút értéke (5) alapján $|x_2|-|x_1|$-gyel egyenlő (és $b\neq 0$ miatt ez a különbség sem 0). Így (6) jobb oldala – felhasználva most azt is, hogy szorzat abszolút értéke a tényezők abszolút értékének szorzatával egyenlő –

$$\frac{2|x_1x_2|}{|x_1+x_2|}+|x_1+x_2|=\frac{2|x_1|\cdot|x_2|}{|x_2|-|x_1|}+|x_2|-|x_1|=$$

$$=|x_2|+\frac{2|x_1|\cdot|x_2|-|x_1|\cdot|x_2|+|x_1|^2}{|x_2|-|x_1|}=|x_2|+\frac{|x_1|\big(|x_2|+|x_1|\big)}{|x_2|-|x_1|}>|x_2|.$$

Ezzel igazoltuk a (6) egyenlőtlenséget, s így (1)-et is.

Lehel Jenő (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. III. o. t.)

Megjegyzés. A második esetben az utolsó előtti kifejezés így alakítható tovább:

$$|x_2| + |x_1| + \frac{2|x_1|^2}{|x_2| - |x_1|} > |x_2| + |x_1|,$$

és világos, hogy az első esetben sem kisebb (6) jobb oldala, mint $|x_1| + |x_2|$. Így fennáll az

$$|x_1| + |x_2| \leqq \frac{2|ac| + b^2}{|ab|}.$$

egyenlőtlenség is, és egyenlőség továbbra is csak akkor következik be, ha az egyik gyök, s így c is 0.