I. megoldás. Párosítsuk össze a bal oldal szimmetrikusan elhelyezkedő tagjait, melyek együtthatói egymás negatívjai. Ekkor kiemelhető lesz $x-1$:

$$6(x^5-1)-x(x^3-1)-43x^2(x-1)=(x-1)[6x^4+6x^3+6x^2+6x+6-$$
$$-x(x^2+x+1)-43x^2]=(x-1)(6x^4+5x^3-38x^2+5x+6),$$

ezért az egyenlet teljesül $x_1=1$-re, további gyökei pedig azok az x értékek, amelyekre

(2) $$6x^4+5x^3-38x^2+5x+6=0.$$

Ez szimmetrikus egyenlet, és az 1113. feladat[1] megjegyzése szerint minden gyökének a reciproka is gyök. Ezért célszerű lesz az egyenletet x^2-nel osztani és új ismeretlen gyanánt x-nek és reciprokának összegét bevezetni. Így ugyanis az új ismeretlenre másodfokú egyenletet kapunk:

$$6x^2+5x-38+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}=6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-38=0,$$

és ha itt

$$x+\frac{1}{x}=y,\quad \text{akkor}\quad x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=y^2-2,$$

tehát

$$6(y^2-2)+5y-38=6y^2+5y-50=0.$$

Innen $y_1=-10/3$ és $y_2=5/2$, ennélfogva az

$$x+\frac{1}{x}=-\frac{10}{3}\quad \text{és}\quad x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$$

egyenletekből:

$$x_2=-3,\quad x_3=-\frac{1}{3},\quad \text{ill.}\quad x_4=2,\quad x_5=\frac{1}{2}.$$

A két gyökpár tagjai valóban egymás reciprokai. A behelyettesítés mutatja, hogy x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 mindegyike kielégíti (1)-et.

Mivel 5-ödfokú egyenletnek legfeljebb 5 különböző gyöke lehet, a megoldást befejeztük.

Ámon Magdolna (Győr, Zrínyi I. lg. III. o. t.)

II. megoldás. Elég az I. megoldás (2) egyenletével foglalkoznunk. Mivel ennek összes együtthatói egész számok, azért véges számú helyettesítési próbával megkereshetjük racionális gyökeit – vagyis a törteket és egészeket –, ha ilyenek egyáltalán vannak. Ismeretes ugyanis[2], hogy egész együtthatós egyenletnek csak olyan racionális gyöke lehet, melynek tovább nem egyszerűsíthető alakjában a számláló az egyenlet állandó tagjának osztója, a nevező pedig az ismeretlen legmagasabb hatványát tartalmazó tag együtthatójának valamely osztója. (2)-ben ez az együttható is és az állandó tag is 6, ezért számláló és nevező gyanánt csak 1, 2, 3 és 6, illetve ezek negatívja jön szóba, tehát (2)-t csak a következő racionális számok elégíthetik ki:

$$\pm1,\pm2,\pm3,\pm6,\pm\frac{1}{2},\pm\frac{3}{2},\pm\frac{1}{3},\pm\frac{2}{3},\pm\frac{1}{6}.$$

Ezek közül $x_2=2$ és $x_3=-3$ mellett a bal oldal értéke 0, ezért a hátra levő két gyök ezek reciproka: $x_4=1/2$, $x_5=-1/3$.

Farkas Zoltán (Hódmezővásárhely, Bethlen G. g. IV. o. t.)

Megjegyzés. Ha nem ismerjük a reciprok egyenletek felhasznált tulajdonságát, akkor a hátralevő két gyököt vagy megtaláljuk további próbálgatással, vagy meghatározhatjuk, mint annak az egyenletnek a gyökeit, amelyik (2)-ből keletkezik, ha azt a megtalált gyökükhöz tartozó gyöktényezők $(x-2)(x+3)$ szorzatával osztjuk.

[1] Lásd K. M. L. 24 (1962/4) 152. o.

[2] Matematika, gimn. IV. o. tankönyv, 194. o.