I. megoldás. Tegyük fel, hogy az $ABCDEF$ hatszögre teljesülnek a feladat feltételei, k körülírt körének középpontja O, k_1 beírt körének középpontja M és szimmetriatengelye az AF és CD oldalak G, ill. H felezőpontját összekötő egyenes. GH-n tükrözve a hatszög önmagába megy át, ezért k és k_1 is, ennélfogva O és M a GH-n vannak. Legyen továbbá M vetülete AB-re J, BC-re K (ezek k_1 érintési pontjai), továbbá O vetülete ugyanezen oldalakra (az oldalak felezőpontja) L, ill. N. Ha a betűzést úgy választjuk, hogy M az OG szakaszon legyen, vagy éppen O-ban, akkor pontjaink sorrendje a hatszög kerületén a következő: A, J, L, B, K, N, C. Így

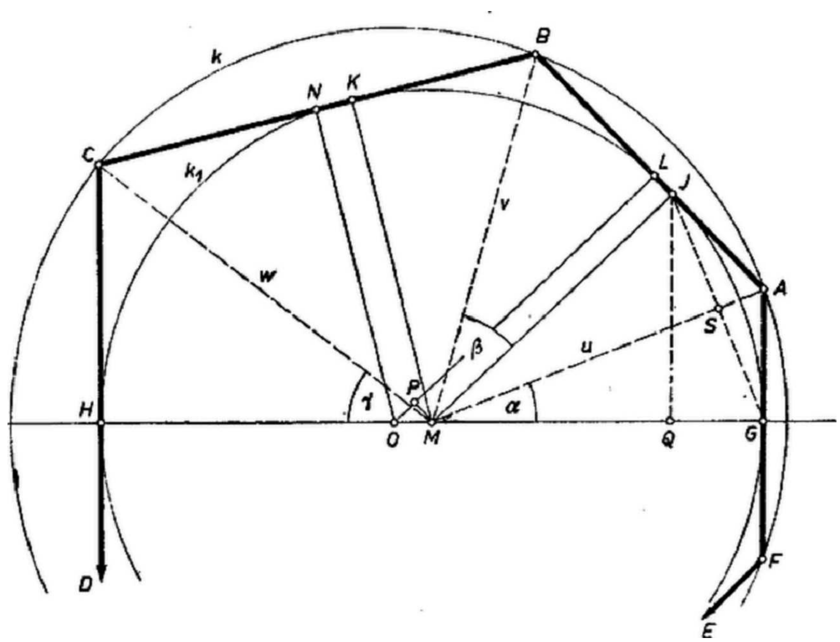
$$\begin{array}{rcl} AL = LB\text{-ből} & \text{és} & BN = NC\text{-ből}: \\ AJ + JL = BJ - JL & \text{és} & BK + KN = CK - KN, \\ BJ = AJ + 2JL, & & BK = CK - 2KN, \end{array}$$

végül, mivel $BJ = BK$, továbbá $AJ = AG$ és $CK = CH$, azért

$$AG + 2JL = AJ + 2JL = BJ = BK = CK - 2KN = CH - 2KN,$$

azaz

$$AG + 2JL = CH - 2KN. \tag{2}$$



Az itt fellépő szakaszokat az alábbiakban kifejezzük R, r és c-vel, így (2)-ből összefüggést kapunk ezen három hosszúság között. Az OAG és OCH derékszögű háromszögekből

$$AG = \sqrt{R^2 - (r+c)^2}, \qquad CH = \sqrt{R^2 - (r-c)^2}. \tag{3}$$

Jelöljük M-nek OL-en való vetületét P-vel, J-nek HG-n levő vetületét Q-val és az $MGAJ$ deltoid átlóinak metszéspontját S-sel. Így $JL = MP$, továbbá MPO és JQM háromszögek hasonlók, ezért

$$\frac{JL}{OM} = \frac{MP}{OM} = \frac{JQ}{MJ} = \frac{JQ}{MG}, \qquad JL = \frac{OM \cdot JQ}{MG} = \frac{c \cdot JQ}{r}.$$

JQ-t más szakaszokkal fejezhetjük ki az MGJ háromszög kétszeres területének kétféleképpen való felírása alapján :

$$JQ = \frac{GJ \cdot MS}{MG};$$

hasonlóan az itt fellépő GJ-t az $MGAJ$ deltoid területének kétféleképpen való felírásával, figyelembe véve, hogy a szimmetriatengely az idomot két derékszögű háromszögre bontja fel:

$$\frac{1}{2} \cdot GJ \cdot AM = MG \cdot AG = r \cdot AG, \qquad GJ = \frac{2r \cdot AG}{AM};$$

végül MS-t az AMG derékszögű háromszögből:

$$MS = \frac{MG^2}{AM} = \frac{r^2}{AM}.$$

Ezekkel

$$JL = \frac{c}{r} \cdot \frac{GJ \cdot MS}{r} = \frac{2cr \cdot AG}{AM^2} = \frac{2cr \cdot AG}{r^2 + AG^2},$$

végül (3) alapján

$$JL = \frac{2cr\sqrt{R^2 - (r+c)^2}}{R^2 - 2cr - c^2}. \tag{4}$$

Ugyanígy kapjuk KN kifejezését:

$$KN = \frac{2cr \cdot CH}{CM^2} = \frac{2cr\sqrt{R^2 - (r-c)^2}}{R^2 + 2cr - c^2}. \tag{5}$$

A (2)–(5) eredmények alapján R, r és c között a következő összefüggés áll fenn:

$$\left(1 + \frac{4cr}{R^2 - 2cr - c^2}\right) \cdot \sqrt{R^2 - (r+c)^2} = \left(1 - \frac{4cr}{R^2 + 2cr - c^2}\right) \cdot \sqrt{R^2 - (r-c)^2}.$$

Innen összevonással, a törtek eltávolításával és $(R^2 - c^2)$ hatványai szerinti rendezéssel:

$$(R^2 - c^2 + 2cr)^2 \sqrt{R^2 - (r+c)^2} = (R^2 - c^2 - 2cr)^2 \sqrt{R^2 - (r-c)^2},$$

$$\left[(R^2 - c^2)^2 + 4cr(R^2 - c^2) + 4c^2r^2\right] \sqrt{(R^2 - c^2) - (r^2 + 2cr)} =$$

$$= \left[(R^2 - c^2)^2 - 4cr(R^2 - c^2) + 4c^2r^2\right] \sqrt{(R^2 - c^2) - (r^2 - 2cr)}.$$

Végül négyzetreemeléssel és rendezéssel a bizonyítandó összefüggést kapjuk.

Benczúr András (Budapest, Fazekas M. gyak. g. IV. o. t.)

II. megoldás. Vezessük be a következő jelöléseket: $GMA\sphericalangle = AMJ\sphericalangle = \alpha$, $JMB\sphericalangle = BMK\sphericalangle = \beta$, $KMC\sphericalangle = CMH\sphericalangle = \gamma$, $MA = u$, $BM = v$, $MC = w$. Így $\cos\alpha = r/u$, $\cos\beta = r/v$, $\cos\gamma = r/w$, és az OMA, OMC háromszögekből a koszinusz tétellel $OA^2 = R^2 = c^2 + u^2 + 2cr$, $OC^2 = R^2 = c^2 + w^2 - 2cr$, tehát

$$u^2 = R^2 - c^2 - 2cr, \qquad w^2 = R^2 - c^2 + 2cr. \tag{6}$$

Hasonlóan az OMB háromszögből

$$OB^2 = R^2 = c^2 + v^2 + 2cv\cos(2\alpha + \beta).$$

Innen, tekintettel arra, hogy $\alpha + \beta + \gamma = 90°$, amiből $2\alpha + \beta = 90° - (\gamma - \alpha)$, továbbá $v = r/\cos\beta = r/\sin(\alpha + \gamma)$ -val

$$(R^2 - c^2)\sin^2(\alpha + \gamma) - r^2 = 2cr\,\sin(\gamma - \alpha) \cdot \sin(\alpha + \gamma) = \tag{7}$$

$$= cr(\cos 2\alpha - \cos 2\gamma) = cr(2\cos^2\alpha - 2\cos^2\gamma) = 2cr\left(\frac{r^2}{u^2} - \frac{r^2}{w^2}\right) =$$

$$= \frac{2cr^3(w^2 - u^2)}{u^2w^2} = \frac{8c^2r^4}{u^2w^2}.$$

A bal oldal átalakítására felhasználjuk, hogy

$$\sin\alpha = \frac{1}{u}\sqrt{u^2 - r^2}, \quad \sin\gamma = \frac{1}{w}\sqrt{w^2 - r^2},$$

$$\sin(\alpha + \gamma) = \frac{r}{uw}\left(\sqrt{u^2 - r^2} + \sqrt{w^2 - r^2}\right).$$

ennélfogva (6) alapján a következő összefüggést kapjuk:

$$(R^2 - c^2)\left(\sqrt{R^2 - c^2 - 2cr - r^2} + \sqrt{R^2 - c^2 + 2cr - r^2}\right)^2 =$$

$$= 8c^2r^2 + u^2w^2 = (R^2 - c^2)^2 + 4c^2r^2.$$

Innen a szokásos rendezési lépésekkel ismét (1) adódik.

Zalay Miklós (Budapest, Hengersor úti g. IV. o. t.)

Megjegyzés. Bizonyítás nélkül közöljük, hogy (1) minden olyan hatszögre érvényes, amelybe, és köréje is, kör írható. Ezen túlmenően érvényes a következő: ha R, r és c teljesítik (1)-et, az egymástól c távolságra levő O_1 és O_2 pontok körül R, ill. r sugárral írt kör k_1, ill. k_2, és $ABCDEF$ olyan a k_1-be írt konvex hatszög, melynek AB, BC, CD, DE és EF oldalai érintik k_2-t, akkor FA oldala is érinti k_2-t.