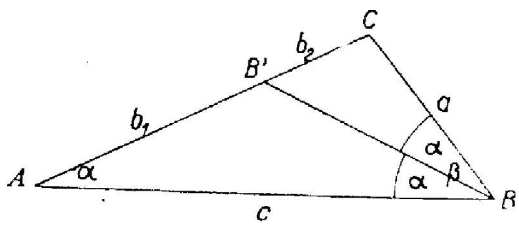
I. megoldás. Legyenek az ABC háromszög szögei rendre α, β, γ és $\alpha : \beta : \gamma = 1 : 2 : 4$. Az állítás szerint a $BC/AB = a/c = \varrho$ arány közelítőleg $4/9$.



1. ábra

Húzzuk meg a β-szög BB' felezőjét és legyen $AB' = b_1$, $B'C = b_2$. Az ABB' háromszög egyenlő szárú, mert $\beta = 2\alpha$, és így $\beta/2 = \alpha$. Innen egyrészt

$$\cos\alpha = \frac{AB/2}{AB'} = \frac{c}{2b_1}, \tag{1}$$

másrészt a szögfelező osztási arányára vonatkozó tétel szerint

$$b_1/b_2 = c/a = 1/\varrho. \tag{2}$$

A $BB'C$ háromszög hasonló ABC-höz, mert C-nél levő szögük közös és $CBB'\sphericalangle = \alpha = BAC\sphericalangle$. Innen

$$b_2 : a = a : (b_1 + b_2),$$

(2) alapján b_2-t ϱb_1-gyel helyettesítve

$$\varrho b_1(b_1 + \varrho b_1) = a^2 = \varrho^2 c^2, \qquad \frac{c}{b_1} = \sqrt{1 + \frac{1}{\varrho}}, \quad \text{és így}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{1}{\varrho}}, \quad \sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{4\varrho}} \approx \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0{,}4330.$$

Mivel a szögek adott arányából $\alpha = 180°/7$, vagyis α a szabályos hétszög egy oldalához tartozó középponti szög fele, azért az r sugarú körbe írt szabályos hétszög egy oldala

$$a_7 = 2r\sin\frac{180°}{7} = 2r\sin\alpha,$$

így közelítőleg

$$a_7 \approx \frac{\sqrt{3}}{2}r,$$

vagyis az r sugarú körbe írt szabályos hétszög oldala közelítőleg akkora, mint az r oldalú szabályos háromszög magassága. Ez ismert közelítő eljárás a szabályos hétszög szerkesztésére.

$\sin\alpha$ értéke a táblázatból 0,4339, tehát a közelítő érték hiánnyal közelít és relatív hibája 0,3% alatt van.

Raisz Miklós (Miskolc, Földes F. g. III. o. t.)

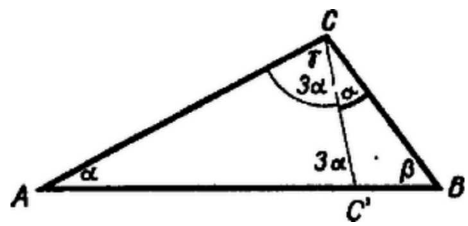
Megjegyzés. Akkor is egy az eredetihez hasonló rész-háromszöget kapunk ABC-ből, ha a $\gamma = 4\alpha$ szögnek a CB oldalhoz közelebbi CC' negyedelőjét húzzuk meg: $CBC'\triangle \sim ABC\triangle$, mert B-nél közös szögük van és $BCC'\sphericalangle = \gamma/4 = \alpha = BAC\sphericalangle$. Továbbá a másik rész-háromszög itt is egyenlő szárú, mert $CC'A\sphericalangle = C'CB\sphericalangle + CBC'\sphericalangle = \alpha + 2\alpha = 3\alpha = 3\gamma/4 = C'CA\sphericalangle$. Így

$$BC' : BC = BC : BA, \qquad BC' = \frac{a^2}{c} = \left(\frac{a}{c}\right)^2 c \approx \varrho^2 c,$$

$$b = AC = AC' = AB - C'B = (1 - \varrho^2)c,$$

tehát az ABC háromszög oldalainak aránya

$$a : b : c := \varrho c : (1 - \varrho^2)c : c = \varrho : (1 - \varrho^2) : 1 \approx 4 : \frac{65}{9} : 9. \tag{3}$$

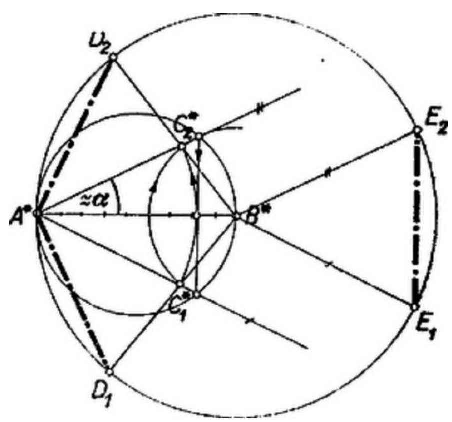


2. ábra

Ha már most olyan $A^*B^*C^*$ háromszöget szerkesztünk, amelyben a három oldal aránya pontosan megfelel (3)-nak, akkor az A^*, B^* csúcsnál levő szög közelítőleg $180°/7$, ill. $360°/7$, ezért a B^* körül B^*A^* sugárral írt körből a B^*C^*, valamint az A^*C^*-gal párhuzamos B^*E^* sugarak D, E végpontjait A^*-hoz hozzávéve az ezen körbe írt szabályos hétszögre 3 csúcs helyzetét ismerjük jó közelítéssel.

Valóban
$$\cos B^*A^*C^*\sphericalangle = \frac{81^2+65^2-36^2}{2\cdot 81\cdot 65} = \frac{73}{81},$$
ebből
$$\sin B^*A^*C^*\sphericalangle = \frac{4\sqrt{77}}{81} \approx 0{,}4333,$$
vagyis a közelítés hibája biztosan alatta van 0,2%-nak.

Ha a közelítően szabályos hétszöget egy adott sugarú körben keressük, akkor egyszerűen így járhatunk el: a középpontot B^*-nak véve egy sugarat 9 egyenlő részre osztunk, föléje mint átfogó fölé olyan derékszögű háromszöget szerkesztünk, melyben a B^*-ból kiinduló befogó 4 rész hosszúságú. Ekkor a másik befogó vetülete az átfogón $9-16/9$, és így a 9, 65/9, 4 oldalakkal szerkesztett háromszög megfelelő (3. ábra).



3. ábra

Quittner Pál (feldolgozó munkatárs)

II. megoldás *a feladat első részére.* A fenti jelölésekkel a színusz-tétel alapján
$$\varrho = a/c = \sin\alpha/\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha/\sin 3\alpha,$$
tehát az addiciós tételből kapható $\sin 3\alpha = \sin\alpha(3-4\sin^2\alpha)$ kifejezés behelyettesítésével, majd $\sin\alpha$-val (ami nem 0) egyszerűsítve:
$$\varrho\sin 3\alpha = \sin\alpha(3\varrho - 4\varrho\sin^2\alpha) = \sin\alpha,$$
$$4\varrho\sin^2\alpha = 3\varrho - 1, \qquad \sin\alpha = \sqrt{\frac{3}{4}-\frac{1}{4\varrho}} \approx \frac{\sqrt3}{4},$$
mint az I. megoldásban.

Renner Gábor (Budapest, I. István g. IV. o. t)