I. megoldás. Legyen a derékszög csúcsa C, az (adott) állandó k, és messe egy a követelménynek megfelelő e_1 egyenes a szárakat A_1-ben, ill. B_1-ben. Ekkor

$$\frac{1}{CA_1}+\frac{1}{CB_1}=k. \tag{1}$$

Tükrözzük ábránkat a derékszög f felezőjére. Ekkor a derékszög szárai egymásba mennek át. Legyen e_1 tükörképének, e_2-nek a CA_1, CB_1 száron levő metszéspontja A_2, ill. B_2. Ekkor nyilván $CA_2=CB_1$, $CB_2=CA_1$, így e_2 szintén megfelelő egyenes. Eszerint az állításban szereplő (állandó) pont csak e_1 és e_2 metszéspontja lehet. Ez viszont azonos e_1 és f metszéspontjával, M-mel, mert ez a tükrözéssel önmagába megy át, és így e_2-nek is pontja.

Számítsuk ki M-nek a száraktól mért távolságát. M-nek CA_1-en levő vetületét M'-vel jelölve az A_1B_1C és A_1MM' közös hegyes szöggel bíró derékszögű háromszögek hasonlóságából, figyelembe véve, hogy a CMM' derékszögű háromszög egyenlő szárú,

$$\frac{M'M}{CB_1}=\frac{M'A_1}{CA_1}=\frac{CA_1-CM'}{CA_1}=1-\frac{M'M}{CA_1}.$$

Innen átrendezéssel és (1) figyelembevételével

$$M'M\left(\frac{1}{CA_1}+\frac{1}{CB_1}\right)=k\cdot M'M=1,\quad \text{tehát}\quad M'M=\frac{1}{k},$$

állandó, független e_1 helyzetétől. Eszerint minden a feltételnek megfelelő egyenes átmegy f-nek a száraktól $1/k$ távolságban levő M pontján. Ezzel az állítást bebizonyítottuk és az állandó pont helyzetét is meghatároztuk.

A felhasznált A_1B_1C háromszög mindig létezik, mert A_1 nem eshet C-be, – különben ugyanis (1)-nek nem volna értelme –, és B_1 sem eshet C-be.

Batizi László (Budapest, Bem J. g. IV. o. t.)

II. megoldás. Vegyük az adott derékszög szárai gyanánt a derékszögű koordinátarendszer két tengelyének pozitív felét és tegyük fel, hogy az $y=m_1x+b_1$ egyenlettel jellemzett e_1 egyenes megfelel a feltételnek. Ekkor e_1-nek az Y-tengely pozitív felével való metszéspontja a $B_1(0,b_1)$ pont, ahol $b_1>0$. Messe e_1 az X-tengely pozitív felét az $a_1(>0)$ abszcisszájú A_1 pontban, eszerint

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{b_1}=k,\quad \text{állandó.} \tag{2}$$

e_1 egyenletéből m_1-et kiküszöbölhetjük, ugyanis A_1 és B_1 koordinátáiból $m_1=-b_1/a_1$. Így az egyenlet

$$y=-\frac{b_1}{a_1}x+b_1,\quad \text{másképpen}\quad \frac{x}{a_1}+\frac{y}{b_1}=1 \tag{3}$$

(az egyenes egyenletének ún. tengelymetszetes alakja; csak akkor használható, ha az egyenes egyik tengellyel sem párhuzamos és

az origón sem megy át).

Legyenek egy másik, a követelménynek megfelelő e_2 egyenes tengelymetszetei a_2 és b_2, ekkor egyenlete

$$\frac{x}{a_2}+\frac{y}{b_2}=1,\quad \text{ahol} \tag{4}$$

$$\frac{1}{a_2}+\frac{1}{b_2}=k, \tag{5}$$

és számítsuk ki e_1 és e_2 metszéspontjának, M-nek koordinátáit. Ha ezeket a_1, b_1, a_2 és b_2-től függetlennek találjuk, ezzel az állítást igazoltuk. A (3)-ból és (4)-ből a törtek eltávolításával adódó

$$b_1x+a_1y=a_1b_1,\qquad b_2x+a_2y=a_2b_2$$

egyenletrendszerből M koordinátái

$$x_M=\frac{a_1a_2(b_2-b_1)}{a_1b_2-a_2b_1},\qquad y_M=\frac{b_1b_2(a_2-a_1)}{a_2b_1-a_1b_2}.$$

Másrészt (2) és (5)-ből

$$a_1+b_1=ka_1b_1,\quad a_2+b_2=ka_2b_2.$$

Ezeket felhasználva x_M és y_M számlálója így alakítható át:

$$a_1a_2b_2-a_1b_1a_2=\frac{1}{k}\big[a_1(a_2+b_2)-(a_1+b_1)a_2\big]=\frac{1}{k}(a_1b_2-a_2b_1),$$
$$b_1b_2a_2-b_1a_1b_2=\frac{1}{k}\big[b_1(a_2+b_2)-(a_1+b_1)b_2\big]=\frac{1}{k}(a_2b_1-a_1b_2).$$

Így azt nyertük, hogy

$$x_M = \frac{1}{k}, \qquad y_M = \frac{1}{k}.$$

Az egyszerűsítés megengedett volt, mert ha

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = a_1 a_2 \left(\frac{b_2}{a_2} - \frac{b_1}{a_1} \right)$$

0 volna, ez azt jelentené, hogy $b_2/a_2 = b_1/a_1$, tehát a két egyenes párhuzamos, és ez esetben csak úgy lehetne a tengelyekből lemetszett részek reciprok értékeinek az összege egyenlő, ha e_2 azonos lenne e_1-gyel. Eszerint a metszéspont valóban független e_1-től és e_2-től, minden a feltételt teljesítő egyenes átmegy az állandó $(1/k,\ 1/k)$ ponton.

A számításban sehol sem használtuk ki az a és b metszetek pozitív voltát, ez tehát negatív a-val, vagy negatív b-vel is érvényes. (Mindkettő nem lehet negatív, mert k nyilván pozitív). Azt találtuk tehát, hogy az állítás azokra az egyenesekre is igaz, amelyek a derékszög egyik vagy pedig a másik szárát annak meghosszabbításában metszik, feltéve, hogy a meghosszabbításból lemetszett szakaszt negatív előjellel vesszük.

Szirai József (Nagykőrös, Arany J. g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. Könnyen bebizonyítható, hogy az állítás derékszög helyett tetszés szerinti hegyes vagy tompaszöget véve is igaz, az állandó pont annak a rombusznak negyedik csúcsa, amelyben az oldal hossza $1/k$, első 3 csúcsa pedig az adott szög csúcsában, ill. a szög egyik-egyik szárán van.

Lehel Jenő (Budapest, Apáczai Csere J. g. III. o. t.)

2. Azok számára, akik ismerik a nomogramokat [1], megemlítjük, hogy az állítás azt fejezi ki, hogy a derékszög két szára és felezője a (2) kétváltozós kapcsolat (a_1 és b_1 változókkal) pontsoros csillag-nomogramját adja (tükör- és lencsetörvény, ellenállások párhuzamos kapcsolása stb.).

---

[1] Lásd bővebben a következő Középiskolai Szakköri Füzetekben: Kürschák – Hajós – Neukomm– Surányi: *Matematikai Versenytételek I.* (Tankönyvkiadó, Budapest, 1955) 90. o. – Haszpra – Pálmay: *Nomogramok* (Tankönyvkiadó, Budapest, 1962) 113. o.