Helyettesítsünk az $x+y+z=0$ összefüggés alapján z helyébe $-(x+y)$-t és fejezzük ki a fellépő hatványösszegeket x-szel és y-nal:

$$x^2+y^2+z^2=x^2+y^2+(x+y)^2=2(x^2+xy+y^2), \tag{1}$$

$$x^3+y^3+z^3=x^3+y^3-(x+y)^3=-3x^2y-3xy^2=-3xy(x+y), \tag{2}$$

$$\begin{aligned} x^4+y^4+z^4&=x^4+y^4+(x+y)^4=2x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+2y^4=\\ &=2(x^4+2x^3y+3x^2y^2+2xy^3+y^4), \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{gathered} x^5+y^5+z^5=x^5+y^5-(x+y)^5=(x+y)\left[x^4-x^3y+x^2y^2-\right.\\ \left.-xy^3+y^4-(x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4)\right]=\\ =(x+y)(-5x^3y-5x^2y^2-5xy^3)=-5xy(x+y)(x^2+xy+y^2), \end{gathered} \tag{4}$$

$$\begin{gathered} x^7+y^7+z^7=x^7+y^7-(x+y)^7=(x+y)\left[x^6-x^5y+x^4y^2-\right.\\ \left.-x^3y^3+x^2y^4-xy^5+y^6-(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)^2\right]=\\ =(x+y)\left[x^6-x^5y+x^4y^2-x^3y^3+x^2y^4-xy^5+y^6-(x^6+\right.\\ \left.+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3+15x^2y^4+6xy^5+y^6)\right]=\\ =(x+y)(-7x^5y-14x^4y^2-21x^3y^3-14x^2y^4-7xy^5)=\\ =-7xy(x+y)(x^4+2x^3y+3x^2y^2+2xy^3+y^4). \end{gathered} \tag{5}$$

Az (1) jobb oldalán álló háromtagú kifejezést négyzetre emelve

$$(x^2+xy+y^2)^2=x^4+2x^3y+3x^2y^2+2xy^3+y^4. \tag{6}$$

Így (1) és (3)-ból

$$\begin{gathered} (x^2+y^2+z^2)^2=4(x^2+xy+y^2)^2=2\left[2(x^4+2x^3y+3x^2y^2+2xy^3+y^4)\right]=\\ =2(x^4+y^4+z^4). \end{gathered}$$

Ezzel az *α)* egyenlőséget igazoltuk.

Ha a *β)*-ban nevezőben szereplő hatványösszegek egyike sem 0, akkor a rájuk nyert (1)–(5) kétváltozós kifejezéseket behelyettesítve a lehetséges egyszerűsítések után az első kéttagú kifejezésben

$$\frac{5}{6}+\frac{7}{6}=2$$

adódik. A második kifejezésben is egyszerűsíthetünk minden az ismeretleneket tartalmazó kifejezéssel, ha az első törtnél figyelemmel vagyunk (6)-ra is, és

$$\frac{3}{5}+\frac{7}{5}=2$$

adódik. Ezzel *β)*-t is igazoltuk.

A fellépő nevezők értéke 0, ha x, y, vagy $x+y=-z$ értéke 0. Ha egyik változó sem 0, akkor

$$x^2+xy+y^2=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}$$

sem 0, s így a négyzete sem. A *β)*-ban fellépő törteknek tehát mindig van értelme, ha x, y, z egyike sem 0, és csak akkor.

Klukovits Lajos (Szeged, Radnóti M. g. III. o. t)

Megjegyzések. 1. Hasonló szorzatalakokat nyerhetünk a fellépő hatványösszegekre a változók szimmetriájának megbontása nélkül is, csak az $x+y+z=0$ összefüggést használva fel ismételten. Pl.

$$\begin{gathered} x^3+y^3+z^3=(x^2+y^2+z^2)(x+y+z)-(x^2y+x^2z+xy^2+y^2z+xz^2+yz^2)=\\ =-(xy+yz+zx)(x+y+z)+3xyz=3xyz. \end{gathered}$$

Ezen az úton is eljuthatunk a feladat megoldásához.

Bellay Ágnes (Budapest, Fazekas M. gyak. g. IV. o. t.)

2. α)-t igazolhatjuk a változók szimmetriájának megbontása nélkül a két oldal különbségének szorzattá alakításával is:

$$2(x^4+y^4+z^4)-(x^2+y^2+z^2)^2=x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2=$$

$$=x^4-2x^2(y^2+z^2)+y^4+z^4-2y^2z^2=\left[x^2-(y^2+z^2)\right]^2-4y^2z^2=$$

$$=(x^2-y^2-z^2+2yz)(x^2-y^2-z^2-2yz)=\left[x^2-(y-z)^2\right]\left[x^2-(y+z)^2\right]=$$

$$=(x-y+z)(x+y-z)(x-y-z)(x+y+z)=0,$$

mert az utolsó tényező 0.