Jelöljük a sorozat k-adik elemét a_k-val. Az elemek képzésére adott szabály az elemek reciprokaiból alkotott sorozatra – feltéve, hogy nem lép fel a sorozatban a 0 –, azt mondja, hogy ebben a sorozatban bármely két elem az előtte és utána állónak számtani közepe:

$$\frac{1}{a_k}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_{k-1}}+\frac{1}{a_{k+1}}\right),\quad \text{vagy}\quad a_k^{-1}=\frac{a_{k-1}^{-1}+a_{k+1}^{-1}}{2}. \tag{1}$$

Eszerint a reciprokokból alkotott

$$a_1^{-1},\ a_2^{-1},\ \ldots,\ a_k^{-1},\ \ldots \tag{2}$$

sorozat számtani sorozat. Különbsége (ha a_1, a_2 nem 0)

$$d=a_2^{-1}-a_1^{-1}=\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}=\frac{a_1-a_2}{a_1a_2}, \tag{3}$$

ennek felhasználásával az n-edik elem

$$a_n^{-1}=a_1^{-1}+(n-1)d=\frac{1}{a_1}+\frac{(n-1)(a_1-a_2)}{a_1a_2}=\frac{(n-1)a_1-(n-2)a_2}{a_1a_2}.$$

Tehát a szóban forgó sorozat n-edik eleme

$$a_n=\frac{a_1a_2}{(n-1)a_1-(n-2)a_2}.$$

Az n-edik elemnek a megelőző kettővel való kifejezését úgy kapjuk, ha (1)-ben k helyébe $n-1$-et írunk és megoldjuk a_n-re:

$$a_n=\frac{a_{n-2}a_{n-1}}{2a_{n-2}-a_{n-1}}.$$

A számtani sorozat ismert tulajdonsága, hogy bármely elem nemcsak a szomszédainak számtani közepével egyenlő, hanem a sorozat bármely hozzá képest szimmetrikus helyzetű elempárjának is. Valóban ha b_1, b_2, $\ldots$,b_k, $\ldots$ egy számtani sorozat, és d a különbsége, továbbá $i<k$, akkor

$$\frac{b_{k-i}+b_{k+i}}{2}=\frac{b_1+(k-i-1)d+b_1+(k+i-1)d}{2}=b_1+(k-1)d=b_k.$$

Ezt a (2) számtani sorozatra alkalmazva

$$\frac{a_{k-i}^{-1}+a_{k+i}^{-1}}{2}=a_k^{-1},\quad \text{vagyis}\quad \frac{1}{a_k}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_{k-i}}+\frac{1}{a_{k+i}}\right),$$

az állításnak megfelelően.

Szekeres Veronika (Makó, József A. g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. Könnyen megadhatjuk annak feltételét, hogy sorozatunk minden határon túl folytatható legyen. Ennek csak az lehet akadálya, ha a (2) sorozatban fellép a 0 szám. Mármost a b_1, b_1+d, b_1+2d,$\ldots$ számtani sorozatban akkor lép fel tagként a 0 szám:

$$b_k=b_1+(k-1)d=0,\quad \text{ha}\quad k-1=-\frac{b_1}{d},$$

vagyis a $-b_1/d$ hányados pozitív egész szám, vagy 0. Így (3) alapján, ha a

$$-\frac{a_1^{-1}}{\dfrac{a_1-a_2}{a_1a_2}}=\frac{a_2}{a_2-a_1}$$

hányados nem pozitív egész szám, vagy 0, akkor sorozatunk tagjai minden határon túl képezhetők.