a) Legyen a gömb sugara r és a gömbsüveg magassága m. Ekkor a kúp magassága $r-m$, alapjának sugarára $\varrho^2=r^2-(r-m)^2=m(2r-m)$. A kívánt úszási helyzetben a kúp kiszorította víz tömege és a gömbcikk tömege egyenlők:

$$\frac{m(2r-m)(r-m)\pi}{3}=\frac{2r\pi m\cdot r\cdot d}{3}$$

$$(2r-m)(r-m)=2r^2d. \tag{1}$$

Innen mindjárt a keresett $r-m=x$ mélységre kaphatunk egyenletet:

$$(r+x)x=2r^2d, \qquad x^2+rx-2r^2d=0.$$

A két gyök szorzata: $-2r^2d$, negatív, mert $d>0$, ezért a két gyök ellentett előjelű (és természetesen biztosan valós). Csak a pozitív gyököt használhatjuk, tehát

$$x=r(\sqrt{1+8d}-1)/2.$$

Úszás nyilván csak $d<1$ mellett lehetséges, így a zárójeles kifejezés értéke kisebb 2-nél, tehát $x<r$, aminek nyilván teljesülnie kellett.

A kúp α fél-nyílásszögére $\cos\alpha=x/r$, tehát (radiánban, ill. fokban):

$$\alpha_{\text{rad}}=\arccos\frac{\sqrt{1+8d}-1}{2}, \quad \alpha=\frac{180^\circ}{\pi}\arccos\frac{\sqrt{1+8d}-1}{2}.$$

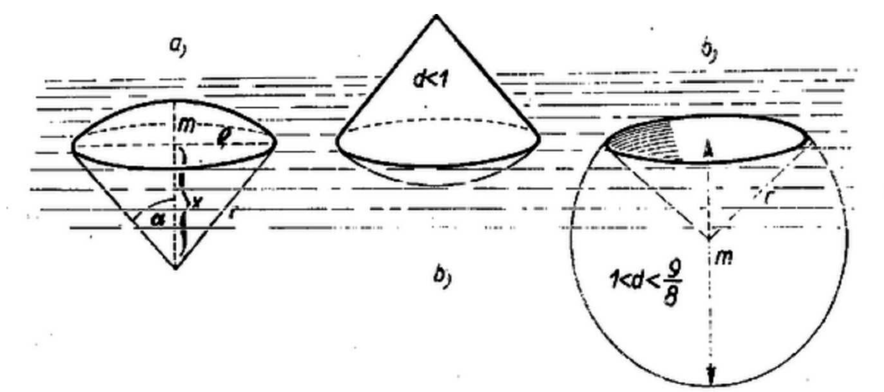
b) A második úszási feltétel mellett a gömbszelet kiszorította víz tömege egyenlő a gömbcikk tömegével:

$$\frac{m^2\pi}{3}(3r-m)=\frac{2r\pi m\cdot r\cdot d}{3},$$

$$m^2-3rm+2r^2d=0, \quad m=\frac{r}{2}(3\pm\sqrt{9-8d}). \tag{2}$$

Eszerint $d<9/8$ mellett mindkét gyök valós, éspedig pozitív.

Ha $d<1$, akkor a diszkrimináns nagyobb 1-nél, ezért a nagyobb gyök nagyobb a gömb $2r$ átmérőjénél, feladatunkban nem értelmezhető; a kisebb gyök viszont kisebb r-nél, tehát az eredményül adódó gömbcikk kisebb félgömbnél.



$d=1$ esetén $m_1=r$, $m_2=2r$, mindkét megoldás elfajult. Az elsőben félgömbről van szó, a kúppalást körlappá terül ki; a kívánt úszás azonban lehetséges. A második megoldásban a gömböt nem vágtuk ketté, nincs kúppalást.

$1<d<9/8$ esetén a diszkrimináns kisebb 1-nél, mindkét m-gyök r és $2r$ közé esik, konkáv gömbcikket ad, és így a test a víznél nagyobb sűrűsége ellenére úszik. Pl. $d=35/32$ esetén $m_1=5r/4$, $m_2=7r/4$. Végül $d=9/8$ esetén a gyakorlat szempontjából egyetlen megoldás: $m=3r/2$.

A gömbcikk csúcsa $d<1$ esetén a víz felett van, $d>1$ esetén pedig alatta, távolsága a felszíntől mindig $|r-m|$. A tömör gömbcikkrész félnyílásszöge itt is a $\cos\alpha=(r-m)/r$ képlettel számítható. $1<d\le 9/8$ esetén α tompaszög, $d=9/8$ esetén éppen 120°.

Nagy Dénes Lajos (Budapest, Rákóczi F. g. IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. A dolgozatok zöme a *b)* részben is x-re írt fel egyenletet és itt is csak a pozitív gyököt fogadta el, nem gondolt konkáv gömbcikkre, amelynél a határoló kúppalást a várakozással ellentétben a vízszintes alatt van, – de mégsem érintkezik a vízzel. Ez a szemléletmód sokaknál a körcikk és a körszelet szűk szemléletében gyökerezik. Jegyezzük meg, a két sugárral, ill. egy húrral kettévágott körlemez *mindkét* része körcikk, ill. körszelet, nemcsak a kisebb. Észrevehető a különbség a *b)* kérdés óvatosabb fogalmazásában is az *a)*-éval szemben: „milyen mélyen van ...”, ill. „a felszínhez viszonyított helyzet.” A $d > 1$ esetet az úszás lehetetlensége alapján elvető versenyzők nem gondoltak pl. a vas hajók úszására.

Volt viszont, aki az *a)* részben gondolt konkáv gömbcikkre, rajzán az egész test a külső vízszint fölött van, a kúpalakú üreg tele van vízzel, és így „valósul meg” a palást érintkezése a vízzel. Ez fizikailag lehetetlen.

Néhányan kimondták, hogy a *b)* eset mindkét m-gyöke pozitív, de az elvont tárgyalás után az eredmény értékelése végett nem tértek vissza a gyakorlathoz. Ez gyakorlati feladatban hiány.

2. Számos dolgozat pongyolán használja az „arc cos” jelölést. Ebben „arc” = arkusz, magyarul *ív*et jelent („árkuspapír”), vagyis ívmértékben, radiánban vett szöget. Az „arc cos x” jelölés pedig a „koszinusz arkusza”, pontosabban: az x számhoz mint koszinusz-értékhez tartozó ív. (Ezt a pongyolaságot természetesen nem vettük hibának.)

3. A (2) egyenlet csak az m-mentes tagban tér el (1) kifejtett alakjától: $m^2 - 3\,rm + 2(1-d)r^2 = 0$-tól. Ezt úgy is mondhatjuk, hogy (1)-ben d helyére $(1-d)$-t írva kapjuk (2)-t, fizikai szempontból pedig a következőképpen értelmezhetjük. V térfogatú d sűrűségű testet vízbe téve $V_1 = Vd$ térfogatú része merül vízbe és $V_2 = V(1-d)$ térfogatú része marad a levegőben. Az *a)* és *b)* úszási helyzetek (konvex gömbcikkre) éppen megcserélik a bemerült, ill. levegőn levő rész-testeket: $V_1' = V_2$ és $V_2' = V_1$; ebből adódik a d, $1-d$ csere.

Bodoky Andrea (Budapest, Teleki B. lg. IV. o. t.)
Simonovits Miklós (Budapest, Radnóti M. gyak. g. IV. o. t.)

4. Az előző megjegyzés megmagyarázza azt a véletlen észrevételt, hogy $d = 0{,}5$ mellett az *a)* és *b)* feltételnek eleget tevő gömbcikk magassága egyenlő. Ekkor $\alpha = 51{,}8^\circ$, tehát a $103{,}6^\circ$ teljes nyílású gömbcikk mindkét helyzetben úszhat.

Demendy Zoltán (Budapest, Hengersor úti g. IV. o. t.)

5. A feladat szövegének megfelelően a fentiekben az úszás biztosságát, stabilitását nem vettük tekintetbe.