A kitűzött kérdéssel egyenértékű az, hogy a bal és jobb oldal különbsége – jelöljük K-val – mely x-ekre pozitív. Fejezzük ki K második és harmadik tagját is $\sin x$-szel. Mivel $\sin 3x = \sin x(3-4\sin^2 x)$,

$$\sin^2 2x = 4\sin^2 x\cos^2 x = 4\sin^2 x(1-\sin^2 x),$$
$$\sin^2 3x = \sin^2 x(9-24\sin^2 x+16\sin^4 x),\ \text{és így}$$
$$K = \sin^2 x+\sin^2 2x-\sin^2 3x = \sin^2 x(-4+20\sin^2 x-16\sin^4 x) =$$
$$= -4\sin^2 x(4\sin^4 x-5\sin^2 x+1) = -4\sin^2 x(\sin^2 x-1)(4\sin^2 x-1) =$$
$$= 4\sin^2 x\cos^2 x(4\sin^2 x-1).$$

($\sin^2 x$ másodfokú polinomját szorzattá alakítottuk annak felhasználásával, hogy a $4z^2-5z+1=0$ egyenlet gyökei $z_1=1$, $z_2=1/4$.) Az utolsó alak első két tényezője sohasem negatív, de lehet 0, éspedig ha – a $(0^\circ, 360^\circ)$ intervallumban – $x=0^\circ$, 180°, ill. 90°, 270°. Ezen x-ek kizárása után K akkor és csak akkor pozitív, ha a harmadik tényező pozitív, azaz

$$4\sin^2 x > 1, \qquad |\sin| > 0{,}5.$$

Ez a $30^\circ < x < 150^\circ$ és $210^\circ < x < 330^\circ$ intervallumban teljesül. A kizárt értékek közül 90° és 270° e részintervallumokba esnek, így a megoldás:

$$30^\circ < x < 90^\circ,\quad 90^\circ < x < 150^\circ,\quad 210^\circ < x < 270^\circ,\quad 270^\circ < x < 330^\circ.$$

Az utóbbi két intervallum az első kettőből 180° hozzáadásával áll elő, ezért az általános megoldás egyszerűbben írható. Ívmértékben:

$$\frac{\pi}{6}+k\pi < x < \frac{\pi}{2}+k\pi \quad\text{és}\quad \frac{\pi}{2}+k\pi < x < \frac{5\pi}{6}+k\pi,$$

ahol k egész szám.

Kemenes János (Budapest, Könyves Kálmán g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. $2x$ függvényeivel is sikerül kifejezni K-t. Ugyanis a szinuszok különbségét és összegét szorzattá alakítva:

$$\sin^2 x-\sin^2 3x = (\sin x-\sin 3x)(\sin x+\sin 3x) =$$
$$= 4\cos 2x\sin(-x)\sin 2x\cos(-x) = -2\sin^2 2x\cos 2x,\ \text{és így}$$
$$K = \sin^2 2x+(\sin^2 x-\sin^2 3x) = \sin^2 2x(1-2\cos 2x).$$

Ez a fentiekhez hasonlóan akkor és csak akkor pozitív, ha

$$\sin^2 2x \neq 0 \text{ és } \cos 2x < 0{,}5,\ \text{azaz}$$
$$\frac{\pi}{3}+2k\pi < 2x < \frac{5\pi}{3}+2k\pi.$$

A kizárt $2x=n+2k\pi$ érték a kapott korlátok közé esik, az intervallumot kettévágja. Osztva 2-vel a fenti eredményre jutunk.

Demendy Zoltán (Budapest, Hengersor úti g. IV. o. t.)

2. Többen grafikus úton, K tagjainak szokásos ábrázolásával vélték megoldani a feladatot. Ez a módszer jó tájékozódást ad, de a kritikus helyek közelében bizonytalanná válik, ti. ott, ahol a két oldal egyenlő. Számszerű vizsgálat nélkül nem állíthatunk biztosat az e helyek „kis” környezetében érvényes nagyságviszonyokról.