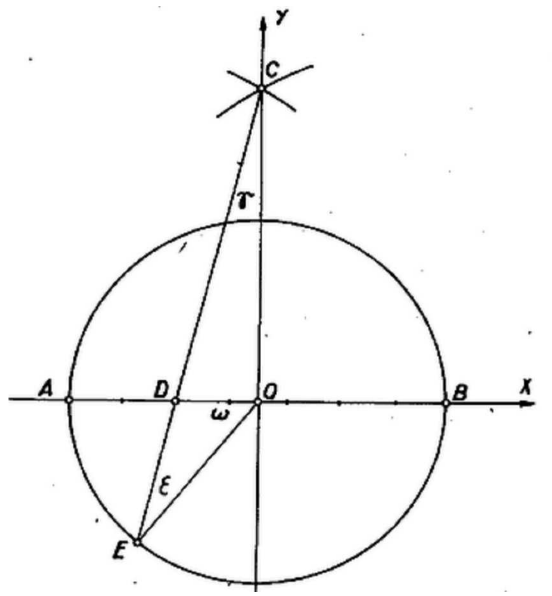
I. megoldás. Ha $n=4$, akkor D azonos a kör O középpontjával, ezért E felezi a C-től távolabb fekvő AB ívet, eszerint a közelítő szerkesztés pontos. Ha $n \geqq 5$, akkor D és E az OC egyenesnek azon a partján van, mint A, ha $n=3$, akkor az ellenkező partján. Legyen $AOE\sphericalangle=\omega$, $OCE\sphericalangle=\gamma$, $OEC\sphericalangle=\varepsilon$, és válasszuk hosszegységnek az adott kör sugarát. Így $AE=2\sin\omega/2$. Az OCE háromszögből $\omega=90^\circ-(\gamma+\varepsilon)$, tehát

$$AE=2\sqrt{\frac{1-\cos\omega}{2}}=\sqrt{2-2\sin(\gamma+\varepsilon)}=\sqrt{2-2\sin\gamma\cos\varepsilon-2\cos\gamma\sin\varepsilon}. \tag{1}$$

A képlet abban az esetben marad helyes $n=3$-ra is, ha ez esetben γ-t és ε-t negatívnak vesszük.



Az OCD derékszögű háromszögben $OC=\sqrt{3}$, $OD=OA-AD=1-4/n=(n-4)/n$, ezért (mindig a pozitív gyököt véve)

$$\operatorname{tg}\gamma=\frac{n-4}{n\sqrt{3}},\quad \text{ebből}\quad \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\gamma}}=\frac{n\sqrt{3}}{\sqrt{4n^2-8n+16}},$$
$$\sin\gamma=\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\gamma}}=\frac{n-4}{2\sqrt{n^2-2n+4}}.$$

Másrészt az OCE háromszögből a szinusz–tétellel

$$\sin\varepsilon=\frac{0C}{0E}\sin\gamma=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{n-4}{\sqrt{n^2-2n+4}},\qquad \text{és így}$$
$$\cos\varepsilon=\frac{\sqrt{4n^2-8n+16-3(n^2-8n+16)}}{2\sqrt{n^2-2n+4}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n^2+16n-32}{n^2-2n+4}}.$$

Az $n=3$ esetben képleteink OD-t, $\sin\gamma$-t és $\sin\varepsilon$-t negatívnak, a koszinusz–értékeket pozitívnak adják, ami éppen megfelel fönti megjegyzésünknek. Ezeket (1)-be beírva, kis átalakítások után

$$AE=\sqrt{2-\frac{(n-4)(3n+\sqrt{(n+8)^2-96})}{2\left[(n-1)^2+3\right]}}= \tag{1}$$
$$=\sqrt{\frac{(n2+4n+16-(n-4)\sqrt{(n+8)^2-96}}{2\left[(n-1)^2+3\right]}}.$$

(A belső négyzetgyökjel alatt pozitív szám áll, ha $n\geqq 2$, és a második alakban a kisebbítendő pozitív és négyzete mindig nagyobbnak adódik a kivonandó négyzeténél.)

Jelöljük az adott körbe írt szabályos n-szög oldalát a_n-nel, az erre (2)-ből nyert közelítő értéket pedig a_n'-vel. Ekkor $a_n=2\sin 180^\circ/n$, $a_n'=AE$, és az előírt n-ekkel a táblázatba foglalt értékek, $a_n'-a_n$ hibák és $(a_n'-a_n)/a_n$ relatív hibák adódnak.

n	a'_n	a_n	$a'_n - a_n$	$\dfrac{(a'_n - a_n)100}{a_n}$
3	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	0	0
5	1,1749	1,1756	$-7 \cdot 10^{-4}$	$-0{,}06\%$
6	1	1	0	0
7	0,8692	0,8678	$+14 \cdot 10^{-4}$	$+0{,}18\%$
8	0,7684	0,7654	$+30 \cdot 10^{-4}$	$+0{,}4\%$
9	0,6886	0,6840	$+46 \cdot 10^{-4}$	$+0{,}7\%$
10	0,6239	0,6840	$+59 \cdot 10^{-4}$	$+1{,}0\%$
36	0,1842	0,1744	$+98 \cdot 10^{-4}$	$+5{,}7\%$

Ezek szerint az eljárás az egyébként is könnyen szerkeszthető szabályos 3-, 4- és 6-szög oldalát pontosan adja meg, a többi $n \leqq 10$ értékekre pedig 1%-nál kisebb hibával. $n=5$-re a közelítő szakasz kisebb, a többiekre nagyobb a valódi oldalszakasznál. (10-nél nagyobb n-ekre a hiba valószínűleg egyre gyorsabban nő, $n=360$-ra már közel 10% a többlet.)

Abos Imre (Budapest, Rákóczi F. g. III. o. t.)

II. megoldás. Legyen az adott kör a koordinátarendszerbe az origó köré egységnyi sugárral beírt kör és legyen $A(-1;0)$, ekkor $B(1;0)$, továbbá $C(0,\sqrt{3})$. Így D abszcisszája $-1+4/n=(4-n)/n$, ordinátája 0, a CD egyenes egyenlete

$$y-\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}n}{n-4}\,x, \qquad \text{amiből} \qquad x=\frac{(n-4)(y-\sqrt{3})}{\sqrt{3}n}.$$

Ezt az egységkör $x^2+y^2-1=0$ egyenletébe helyettesítve E ordinátájára

$$\left[(n-4)^2-1-3n^2\right]y^2-2\sqrt{3}(n-4)^2y+3\left[(n-4)^2-n^2\right]=0,$$

amiből a negatív gyökre van szükségünk, mert így kapjuk a C-től távolabbi metszéspontot. A diszkrimináns 1/4 része, majd a kívánt gyök:

$$3(n-4)^4-3\left[(n-4)^2+3n^2\right]\left[(n-4)^2-n^2\right]=9n^4-6n^2(n-4)^2=$$
$$=3n^2(n^2+16n-32),$$
$$y_E=\frac{\sqrt{3}(n-4)^2-n\sqrt{3}\sqrt{n^2+16n-32}}{4n^2-8n+16}.$$

Így E abszcisszája, mindjárt összevonással:

$$x_E=\frac{n-4}{n}\left(\frac{y}{\sqrt{3}}-1\right)=\frac{n-4}{n}\cdot\frac{-3n^2-n\sqrt{n^2+16n-32}}{4(n^2-2n+4)}=$$
$$=-\frac{(n-4)(3n+\sqrt{n^2+16n-32})}{4(n^2-2n+4)},$$

végül az AE szakasz hosszának négyzete

$$(x_E+1)^2+y_E^2=(x_E^2+y_E^2+1)+2x_E=2+2x_E=$$
$$=2-\frac{(n-4)(3n+\sqrt{n^2+16n-32})}{4(n^2-2n+4)},$$

megegyezésben a (2) eredménnyel.

Surányi Sándor (Budapest, Madách I. g. IV. o. t.)