Jelöljük a kétjegyű szám (egyenlő) jegyeit x-szel, a négyzetéit y-nal és a számrendszer alapszámát b-vel. Ekkor b legalább 2, x és y kisebb b-nél és egyik sem 0. A feladat feltétele így írható:

$$\overline{xx}^2 = \overline{yyyy},$$

azaz

$$(xb+x)^2 = yb^3 + yb^2 + yb + y.$$

Kiemeléssel, majd $b+1$-gyel (ami nem 0) egyszerűsítve

$$x^2(b+1)^2 = yb^2(b+1) + y(b+1) = y(b+1)(b^2+1),$$
$$x^2(b+1) = y(b^2+1).$$

A bal oldal osztható $b+1$-gyel, ezért a jobb oldal is. A jobb oldalon egy $b+1$-gyel nyilvánvalóan osztható részt különválasztunk:

(1) $$x^2(b+1) = y(b^2-1+2) = y(b+1)(b-1) + 2y.$$

Eszerint a jobb oldal csak úgy lehet $b+1$-gyel osztható, ha $2y$ osztható vele. Másrészt $0 < 2y < 2b$, tehát kell, hogy $2y = b+1$ legyen és (1)-ből

(2) $$x^2 = y(b-1) + 1,$$

vagy 2-vel szorozva, hogy y-t kiküszöböljük:

$$2x^2 = (b+1)(b-1) + 2 = b^2 + 1.$$

Ezek szerint b csak a

(3) $$b^2 = 2x^2 - 1$$

egyenletet kielégítő szám lehet.

Könnyű látni, hogy $x = 1$, $b = 1$ kielégíti az egyenletet, de kérdésünknek nem megoldása, mert 1 nem lehet számrendszer alapszáma, és nem áll $x < b$. További megoldást keresve b csak páratlan lehet, mert b^2 páratlan. Így pedig x sem lehet páros, mert $2x^2 = b^2+1 = (2k+1)^2+1 = 4k(k+1)+2$, tehát $x^2 = 2k(k+1)+1$, páratlan. Mindjárt az $x = 5$ próba megoldást ad: $b = 7$, és ebből $y = 4$. Eszerint

$$(55_7)^2 = 4444_7.$$

(A tízes rendszerben az alap $5\cdot 7 + 5 = 40$, a négyzete $4\cdot 7^3 + 4\cdot 7^2 + 4\cdot 7 + 4 = 4(7^2+1)(7+1) = 1600$, tehát az eredmény helyes.)

Tetszés szerinti számú megoldást kapunk az $x_0 = 1$, $b_0 = 1$ megoldásból kiindulva az $x_{k+1} = 3x_k + 2b_k$, $b_{k+1} = 4x_k + 3b_k$ képletpár alapján.[1] Ha ugyanis x_k, b_k megoldás, azaz

$$b_k^2 - 2x_k^2 + 1 = 0,$$

akkor x_{k+1}, b_{k+1} is megoldás, mert

$$b_{k+1}^2 - 2x_{k+1}^2 + 1 = 16x_k^2 + 24x_kb_k + 9b_k^2 - 18x_k^2 - 24x_kb_k - 8b_k^2 + 1 =$$
$$= b_k^2 - 2x_k^2 + 1 = 0.$$

A képletpárral $x_1 = 3+2 = 5$ és $b_1 = 4+3 = 7$; ezt találtuk meg próbálgatással. A következő megoldás[2] $x_2 = 29$, $b_2 = 41$ és $y_2 = 21$.

Gálfi László (Budapest, I. István g. IV. o. t.)

Megjegyzés. (2)-ből b kiküszöbölésével

$$x^2 = 2y^2 - 2y + 1 = y^2 + (y-1)^2,$$

eszerint az x, y számjegyekre minden olyan pythagorászi számhármas átfogószáma, ill. nagyobb befogószáma megoldást ad, melyben a befogószámok különbsége 1. Ezek csak alap hármasok lehetnek, mert nem alaphármasban a befogószámok különbsége nyilván többszöröse a legnagyobb közös osztónak. Ezzel az észrevétellel azonban nem jutottunk közelebb a megoldáshoz, mert ha az ismert képletrendszer[3] befogó képleteivel

$$(u^2 - v^2) - 2uv = \pm 1, \qquad \text{akkor} \qquad (u-v)^2 = 2v^2 \pm 1,$$

azaz ismét a (3) típusú egyenletre jutottunk, ill. arra, amely belőle -1 helyére $+1$-et írva adódik.

[1] Lásd pl. Erdős Pál–Surányi János: *Válogatott fejezetek a számelméletből* (Budapest, 1960, Tankönyvkiadó) 200. o. 6. fd.
[2] Igaz az is, de bizonyítása nem könnyű, hogy a fenti összefüggések alapján kiszámított x_k, b_k számpárok megadják (2) összes megoldását.
[3] Lásd legutóbb K. M. L. 23 (1961/12) 212-213. o.