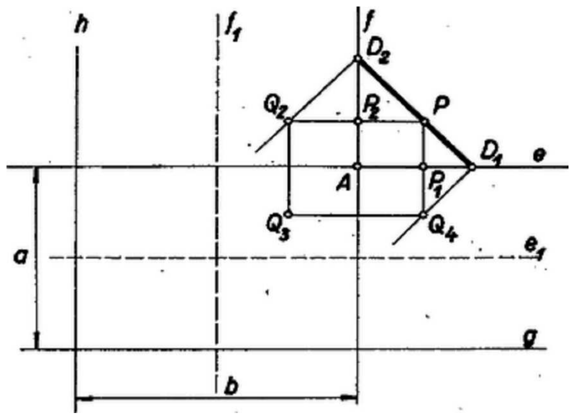
Az e és g egyenestől mért távolságok kisebbikén, ha a két távolság egyenlő, ezek közös értékét fogjuk érteni a szokásnak megfelelően. Jelöljük az adott távolságot d-vel, a téglalap e-vel, ill. f-fel párhuzamos szimmetriatengelyét e_1-gyel, ill. f_1-gyel (1. ábra). Vizsgáljuk először azokat a P pontokat, amelyek nincsenek messzebb e-től, mint g-től, sem f-től nincsenek messzebb, mint h-tól. Ezek e_1-nek azon az oldalán vannak, amelyiken e, másrészt f_1 nek azon az oldalán, mint f (hozzávéve az e_1 és f_1 egyenes megfelelő részeit is), vagyis az e_1 és f_1 meghatározta abban a T_1 síknegyedben, a határokat is hozzávéve, amelybe e és f metszéspontja esik. A keresett mértani hely ide eső részéből a többi rész a szimmetriaviszonyok alapján már könnyen fog adódni.

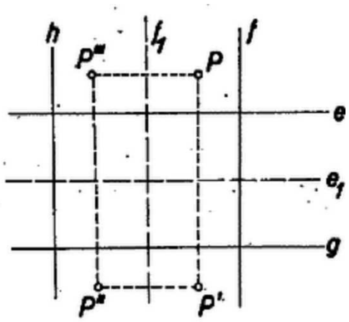


1. ábra

Két pontnak, amelyek egymás tükörképei e-re vagy f-re, vagy a két egyenes A metszéspontjára, egyenlő a távolsága e-től is, f-től is, így vagy mindegyik hozzátartozik a mértani helyhez, vagy egyik sem. Elég tehát az e és f közti egyik síknegyedet vizsgálni. Vegyük azt, amelyiken sem e_1, sem f_1 nem megy át (ez teljesen benne van T_1 ben).

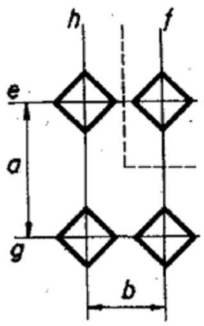
Az e-n és f-en A-tól d távolságra levő D_1 és D_2 pont nyilván a mértani helyhez tartozik. Legyen P a mértani hely egy további pontja a vizsgált síkrészben, és P vetülete e-n, ill. f-en P_1, ill. P_2. Mivel AP_1PP_2 téglalap, azért $d = PP_1 + PP_2 = PP_1 + AP_1$. Másrészt $d = AD_1 = AP_1 + P_1D_1$, tehát $PP_1 = P_1D_1$, s így PP_1D_1 egy egyenlő szárú derékszögű háromszög, tehát $PD_1P_1\sphericalangle = 45°$. Ez azt jelenti, hogy a mértani hely P pontjai a D_1D_2 egyenesszakaszon vannak.

Legyen a szakasz egy tetszés szerinti pontja P^*, vetülete e-n, f-en P_1^*, P_2^*, akkor $P^*P_1^*D_1$ egyenlő szárú derékszögű háromszög, s így $P^*P_1^* + P^*P_2^* = P_1^*D_1 + AP_1^* = AD_1 = d$, tehát P^* a mértani helyhez tartozik. A mértani helynek a vizsgált síkrészbe eső része tehát a D_1D_2 egyenesszakasz. A T_1 be eső további része e szakasz e-re, f-re és az A pontra vonatkozó tükörképéből annyi, amennyi még T_1-hez tartozik. Ez egy négyzet kerülete, melynek átlói az e és az f egyenesen vannak és $2d$ hosszúságúak, feltéve, hogy d nem nagyobb az e és g egyenesek a távolságának, sem az f és h egyenesek b távolságának felénél, különben e négyzet kerületének a T_1-be eső (esetleg nem is összefüggő) részeiből áll.



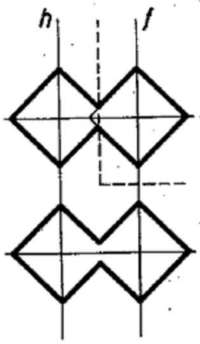
2. ábra

Legyen most már P a T_1 egy tetszés szerinti pontja és P' az e_1 re vonatkozó tükörképe (2. ábra). Ekkor P és P' távolsága f-től és h-tól megegyezik, továbbá egyenlő P-nek e-től és P'-nek g-től mért távolsága, és hasonlóan P-nek g-től és P'-nek e-től való távolsága. Így P és P' vagy mindkettő a mértani helyhez tartozik, vagy egyik sem. Hasonló érvényes P'-nek f_1 re vett P'' tükörképére és P''-nek e_1-re vett P'' tükörképére is. A teljes mértani helyet ezek szerint úgy kapjuk, hogy a mértani hely T_1 be eső részét e_1-re tükrözzük, majd a tükörképet f_1-re tükrözzük és a második tükörképet újra e_1-re. Aszerint, hogy a, b, d és $a+b$ között rendre $2d \leqq b \leqq a$, ill. a $b < 2d < a$, ill. $b < a < 2d < a+b$, ill. $2d > a+b$ nagyságviszony áll fenn, a mértani hely a 3–6. ábrák szerint alakul, $2d = a+b$ esetén a mértani helynek az adott téglalap középpontjában elszigetelt pontja van.



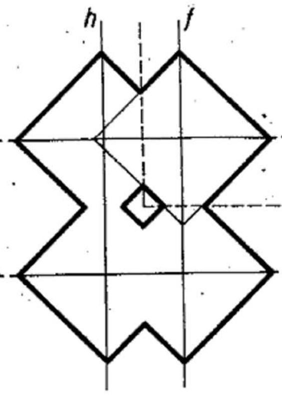
$2d<a$

3. ábra



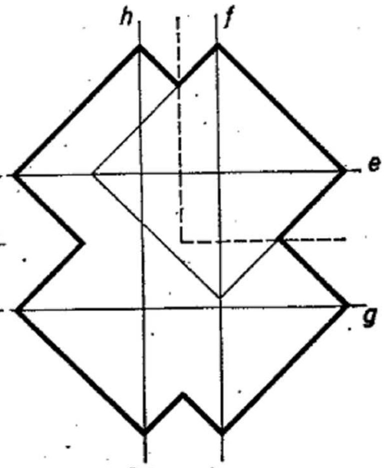
$b<2d<a$

4. ábra



$b<a<2d<a+b$

5. ábra



$2d>a+b$

6. ábra

Jankó Mihály (Szentendre, Móricz Zs. g. III. o. t.)