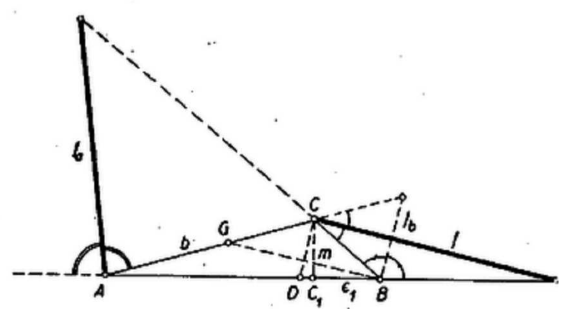
I. megoldás. Célszerű a külső szögfelező szóban forgó szakaszát az oldalakkal általában kifejezni, mert bár számpéldáról van szó, de a számítást háromszor kell elvégeznünk. Messe az ABC háromszögben a C-ből húzott belső, ill. külső szögfelező az AB egyenest D, ill. E-ben,[1] legyen $CE = f$, továbbá a C-ből húzott magasság $CC_1 = m$. A szokásos jelöléseket használva feltehetjük, hogy $a < b$ (egyenlőség esetén E nem léteznék), így $a < \beta$, ezért $CDB\sphericalangle = \gamma/2 + \alpha < \gamma/2 + \beta = CDA\sphericalangle$, tehát CDB hegyesszög, D az AC_1 szakaszon van, E pedig AB-nek B-n túli meghosszabbításán, mert $CE \perp CD$. f-et a CEC_1 derékszögű háromszögből számítjuk, evégett a CC_1 és C_1E befogókat kifejezzük az oldalakkal. Legyen a BE szakasz hossza e, és $BC_1 = c_1$ (az utóbbit előjellel értve, éspedig a BA irányt véve pozitívnak), így a CC_1A és CC_1B derékszögű háromszögekből

$$m^2 = b^2 - (c - c_1)^2 = a^2 - c_1^2, \quad \text{és innen}$$

$$c_1 = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}. \tag{1}$$



Mérjük fel másrészt CB-t CA-ra és legyen a végpont G. Ekkor a $BCG\triangle$ egyenlő szárú, $GB \perp CD \perp CE$, ezért $GB \parallel CE$, és az ABG, AEC háromszögek hasonlók.
Így

$$AB : AG = AE : AC, \qquad c : (b - a) = (c + e) : b, \quad \text{és} \tag{2}$$

$$e = \frac{ac}{b - a}. \tag{3}$$

Most már a $CEC_1\triangle$-ből, majd (1) és (3) felhasználásával és a szokásos $a + b + c = 2s$ jelöléssel

$$\begin{aligned} f^2 &= m^2 + (e + c_1)^2 = (m^2 + c_1^2) + 2ec_1 + e^2 = a^2 + 2ec_1 + e^2 = \\ &= a^2 + \frac{(a^2 + c^2 - b^2)a}{b - a} + \frac{a^2c^2}{(b - a)^2} = \frac{ab}{(b - a)^2}(c^2 - a^2 + 2ab - b^2) = \\ &= \frac{ab\left[c^2 - (a - b)^2\right]}{(b - a)^2} = \frac{ab(c - a + b)(c + a - b)}{(b - a)^2} = \\ &= \frac{4ab(s - a)(s - b)}{(b - a)^2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Könnyű belátni, hogy eredményünk $a > b$ esetén is érvényes. Ekkor ugyanis E az AB-nek A-n túli meghosszabbításán van, ezt fejezi ki, hogy (3)-ból e-t negatívnak kapjuk.[2] Ez azonban (4)-ben már nem okoz változást. Az $a < b$ feltevést máshol nem használtuk fel. Eszerint (4) minden $a \neq b$ esetre érvényes. Így az A csúcsból húzott f_a és a B-ből húzott f_b külső szögfelezőszakasz hosszának négyzete (4)-ből a betűk ciklikus felcserélésével

$$f_a^2 = \frac{4bc(s - b)(s - c)}{(c - b)^2}, \qquad f_b^2 = \frac{4ca(s - c)(s - a)}{(a - c)^2},$$

hacsak $c \neq b$, ill. $a \neq c$.

Ha már most $a = 5 - \sqrt{7}$, $b = 6$, $c = 5 + \sqrt{7}$, akkor $f_a = 4\sqrt{3} (\approx 6{,}928)$, $f_b = 6/\sqrt{7} (\approx 2{,}268)$, $f_c = f = 4\sqrt{3} (\approx 6{,}928)$. Eszerint a legnagyobb és a legkisebb szög csúcsából húzott külső szögfelezőszakasz egyenlő.

Zalán Péter (Aszód, Petőfi S. g. IV. o. t.) dolgozatából
egyszerűsítéssel és kiegészítéssel.

Megjegyzés. Lényegében ugyanígy jártak el azok, akik CE-t a $CEB\triangle$-ből a koszinusz–tétellel számították és ehhez $\cos CBE\sphericalangle$-et az $ABC\triangle$-ből fejezték ki.

---

[1] Az ábrán E és e pótlandó.

[2] Vagy pedig $BE = e > 0$, (2) helyére $c : (a - b) = (e - c) : b$ lép, és (3) negatívját kapjuk.

II. megoldás. A fenti (4) eredményhez szögek ismeretét feltételezve trigonometriai összefüggések alapján is eljuthatunk, ha az így nyert kifejezésekben a szögfüggvényeket ismét az oldalakkal fejezzük ki. Az ABC és BEC háromszögek együttes területe egyenlő az $AEC\triangle$ területével. Mindegyiket 2-szer véve

$$ab\sin\gamma + af\sin BCE\sphericalangle = bf\sin ACE\sphericalangle.$$

Itt $BCE\sphericalangle = DCE\sphericalangle - DCB\sphericalangle = 90^\circ - \gamma/2$, és $ACE\sphericalangle = 90^\circ + \gamma/2$, ezért

$$2ab\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2} + af\cos\frac{\gamma}{2} = bf\cos\frac{\gamma}{2},$$

és mivel $\gamma/2 < 90^\circ$, $\cos\gamma/2 \neq 0$, egyszerűsítés után

$$f = \frac{2ab}{b-a}\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{2ab}{b-a}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}} = \frac{2}{b-a}\sqrt{ab(s-a)(s-b)}.$$

Böröczky György (Budapest, Madách I. g. IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. A két szögfelezőszakasz egyenlősége meglepő, különösen azok részére, akik ismerik a következő tételt: *a háromszög két belső szögfelezőjének a csúcs és a szemben levő oldal közé eső szakasza akkor és csak akkor egyenlő, ha a háromszög egyenlő szárú és a kérdéses felezők az egyenlő szögeket felezik.* Kézenfekvő volna ebből az a sejtés, hogy két külső szögfelezőszakasz egyenlő voltából is következik, hogy a háromszög egyenlő szárú, láttuk azonban, hogy ez nem áll. Ezért szokás az ilyen háromszögeket *pszeudo–egyenlő szárú* háromszögnek (magyarul *ál*–egyenlő szárú) nevezni. Példánk is ilyen.

Az idézett tételnek az is érdekessége, hogy a fordított állítás bizonyítása – ti. hogy ha két belső szögfelezőszakasz egyenlő hosszú, akkor a felezett szögek (ill. a szemben levő oldalak) egyenlők – jóval nehezebb, mint az várható volna.

2. Abból a követelményből, hogy az A és C csúcsokból húzott külső szögfelezőszakaszok egyenlők legyenek, következik, hogy a háromszög oldalai között teljesülnie kell a következő egyenlőségnek:

$$b^3 - (a+c)b^2 + 3abc - ac(a+c) = 0.$$

Horváth Péter (Budapest, Kossuth L. gépip. t. II. o. t.)