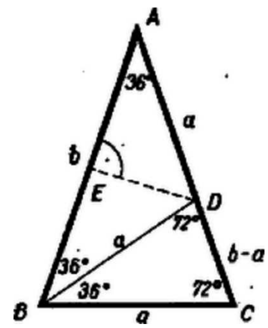
I. megoldás. A 36°-os szög a 180°-nak 5-ödrésze. Ezért az olyan ABC egyenlő szárú háromszögben ($AB=AC$), melynek szárai között $BAC\sphericalangle=36°$-os szög van, az alapon levő szögek nagysága 72°, a 36°-nak 2-szerese. Így az ABC szög BD felezőjét meghúzva egyrészt $ABD\sphericalangle=BAD\sphericalangle=36°$, másrészt $BDC\sphericalangle=ABD\sphericalangle+BAD\sphericalangle=72°=BCD\sphericalangle$, tehát a keletkezett ABD és BDC háromszögek egyenlő szárúak: $BC=BD=AD$, és BDC háromszög hasonló ABC-hez.



Ebből kiszámíthatjuk a $BC=a$ és $AB=b$ oldalak arányát, abból pedig az ABD háromszög felhasználásával $\cos 36°$-ot:

$$CA:BC=DB:CD,$$

(1)
$$b:a=a:(b-a),$$

(2)
$$b^2-ab-a^2=0,$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2-\frac{b}{a}-1=0,$$

és ennek pozitív gyökével:

$$\cos 36°=\frac{AE}{AD}=\frac{AB}{2AD}=\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{a}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}=$$
$$=\frac{1+\sqrt{5}}{4},$$

az állításnak megfelelően.

$3°=75°-72°$, ezért előkészítésül kiszámítjuk 75° és 72° szinuszát és koszinuszát a $75°=30°+45°$, $72°=2\cdot 36°$ felbontások és az első rész eredménye alapján.

$$\sin 75°=\sin(30°+45°)=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\approx 0{,}9659,$$
$$\cos 75°=\cos(30°+45°)=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\approx 0{,}2588;$$
$$\cos 72°=\cos^2 36°-\sin^2 36°=2\cos^2 36°-1=\frac{6+2\sqrt{5}}{8}-1=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\approx 0{,}3090,$$
$$\sin 72°=\sqrt{1-\cos^2 72°}=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\approx 0{,}9711.$$

Ezekkel

$$\sin 3°=\frac{1}{16}\left[(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)-(\sqrt{6}-\sqrt{2})\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right]\approx 0{,}05234,$$
$$\cos 3°=\frac{1}{16}\left[(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)+(\sqrt{6}+\sqrt{2})\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right]\approx 0{,}9986.$$

$\sin 3°$-ot 4 értékes jegyre számítottuk ki.

Kiss István (Miskolc, Kilián Gy. g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. A (2) egyenlethez az 1054.feladatban[1] bebizonyított tételnek a szabályos ötszög 4 csúcsával meghatározott trapézra való alkalmazásával is eljuthatunk.

[1] 1 K. M. L. 23 (1961/9) 17. o.

Nováky Béla (Budapest, I. István g. IV. o. t.)

2. A (2) egyenletből $a=b(\sqrt{5}-1)/2\approx 0{,}618\,b$ az ún. „aranymetszés” (folytatólagos arányos osztás) feladatának megoldását adja. Ez a régi feladat egy szakasz olyan felosztását kívánja két részre, hogy a nagyobb rész ugyanolyan arányban álljon az egésszel, mint a maradék a nagyobb résszel.

Ezt fejezi ki az (1) aránypár. Az is benne van e követelményben, hogy a a nagyobb rész, ugyanis az első arányban $b>a$, ezért a másodikban is $a>b-a$.

3. Mivel 75° és 72° szinusza, ill. koszinusza egyenlő 15° és 18° koszinuszával ill. szinuszával, azért eredményeinket ugyanezen alakban kapnánk a $3^\circ=18^\circ-15^\circ=\dfrac{36^\circ}{2}-\dfrac{30^\circ}{2}$ egyenlőség alapján. Más alakra jutunk, ha előbb $6^\circ=36^\circ-30^\circ$ koszinuszát számítjuk, majd a félszög–képletekkel fejezzük be a számítást. 36°-kal együtt 54° függvényeit is ismerjük, ebből megkaphatjuk 27°-éit és $3^\circ=30^\circ-27^\circ$ alapján is számíthatunk. A dolgozatokban mindezen módok előfordultak.

II. megoldás (a feladat első részére). A $c=(\sqrt{5}+1)/4$ szám pozitív és 1-nél kisebb, így van olyan φ hegyes szög, amelynek c a koszinusza. Megmutatjuk, hogy $5\varphi=180^\circ$, tehát $\varphi=36^\circ$. A kétszeres szög koszinuszára ismert azonosságot kétszer alkalmazva:

$$\cos 2\varphi=\cos^2\varphi-\sin^2\varphi=2\cos^2\varphi-1=\frac{6+8\sqrt{5}}{8}-1=\frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Ebből látjuk, hogy 2φ is még hegyes szög: $2\varphi<90^\circ$. A 4-szeres szögre térve:

$$\cos 4\varphi=2\cos^2 2\varphi-1=-\frac{\sqrt{5}+1}{4}=-c=-\cos\varphi,$$

tehát $90^\circ<4\varphi<180^\circ$. Ezek szerint 4φ és φ olyan tompa, ill. hegyes szög, melyek koszinuszának abszolút értéke megegyezik. Ebből következik, hogy kiegészítő szögek, $4\varphi+\varphi=5\varphi=180^\circ$. Ezt akartuk bizonyítani.

Csákó György (Sátoraljaújhely, Kossuth L. g. IV. o. t.).

Megjegyzés. Hasonló gondolatmenettel meghatározhatjuk $\cos 36^\circ$-ot, ha nem ismerjük is előre az értékét. A $2\cdot 36^\circ=72^\circ$ és a $3\cdot 36^\circ=108^\circ$ is kiegészítő szögek, tehát $\varphi=36^\circ$-ra

$$\cos 3\varphi+\cos 2\varphi=0.$$

Ebből szeretnék $x=\cos\varphi$-t meghatározni.

$$\begin{gathered}\cos 2\varphi=2\cos^2\varphi-1=2x^2-1,\\ \cos 3\varphi=(2\cos^2\varphi-1)\cos\varphi-2\sin^2\varphi\cos\varphi=\\ =2\cos^3\varphi-\cos\varphi-2(\cos\varphi-\cos^3\varphi)=4\cos^3\varphi-3\cos\varphi=4x^3-3x.\end{gathered}$$

Így a

$$4x^3+2x^2-3x-1=0$$

egyenletre jutottunk. Ennek egy gyöke $x=-1$ (és ez nyilván nem $\cos 36^\circ$). A bal oldalból $(x+1)$-et kiemelve

$$4x^3+2x^2-3x-1=(x+1)(4x^2-2x-1).$$

$\cos 36^\circ$ a második tényező pozitív 0-helye, vagyis

$$\cos 36^\circ=\frac{1+\sqrt{5}}{4},$$

és ezt kellett bizonyítanunk.