

Az eljárást így mondhatjuk ki: Legyen d páratlan, 5-tel nem osztható (természetes) szám, és ennek valamely, 1-es jegyre végződő többszöröse $10\delta + 1$, ahol δ természetes szám. Az N (többjegyű) szám akkor és csak akkor osztható d -vel, ha az utolsó jegyének elhagyásával nyert számból az elhagyott jegy δ -szorosát levonva a nyert különbség osztható d -vel.

A bizonyításban N utolsó jegyét u -val, az elhagyásával nyert számot N' -vel, a különbséget N_1 -gyel jelöljük. Eszerint $N = 10N' + u$ és $N_1 = N' - \delta u$. Tekintsük a $10N_1$ számot. Erre $10N_1 = 10N' - 10\delta u = N - u - 10\delta u = N - u(10\delta + 1) = N - umd = N - nd$, ahol $n = um$ és m az a (természetes) szám, amellyel d -t szorozva $10\delta + 1$ -et kaptuk.

Eszerint ha N osztható d -vel, azaz $N = d \cdot k$, ahol k egész szám, akkor $10N_1$ is osztható vele, mert

$$\frac{10N_1}{d} = \frac{N - nd}{d} = k - n, \quad 10N_1 = N - nd = (k - n)d,$$

és $k - n$ egész szám. A feltevés szerint d a 10-höz képest relatív prim, mert $10 = 2 \cdot 5$ -nek egyik tényezőjével sem osztható, azért $10N_1$ csak úgy osztható d -vel, ha N_1 osztható vele. Ha viszont N nem osztható d -vel, akkor $10N_1$ sem, ugyanannyi maradékot ad d -vel osztva, mint N . Így N_1 sem lehet osztható d -vel.

Fordítva, ha N_1 osztható d -vel, akkor $10N_1$ is és $N = 10N_1 + nd$ is osztható d -vel. Ezzel az állítást bebizonyítottuk. d -hez mindig található az 1-re végződő többszöröst adó m szám, mert d utolsó jegye

$$1, \quad 3, \quad 7, \quad \text{vagy} \quad 9,$$

ennélfogva m gyanánt minden olyan szám megfelel,¹ melynek utolsó jegye rendre

$$1, \quad 7, \quad 3, \quad \text{ill.} \quad 9.$$

Ennek alapján minden egyes d osztó mellett több m , ill. δ számot is használhatunk. Pl. $d = 7, 11$ esetében a legkisebb δ a már látott 2, ill. 1, a $d = 13$ esetben pedig $7 \cdot 13 = 91$ -ből $\delta = 9$, és ezekkel a δu szorzat könnyen képezhető. De gondolva arra, hogy $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$, mindhárom esetben jól használható $\delta = 100$ is, amíg N, N_1, N_2, \dots, N_i -nek még elegendő számú jegye van. Látjuk azonban, hogy az N, N_1, N_2, \dots számok rövidülésében az utolsó jegy elhagyása a lényeges.

Megjegyezzük még, hogy ha N nem osztható d -vel, akkor az $N_1 : d$ osztás maradéka általában más, mint az $N : d$ (és $10N_1 : d$) osztás maradéka.

Szép András (Budapest, Rákóczi F. g. II. o. t)

¹Páros, valamint 5-re végződő d -vel az eljárás csak azért nem alkalmazható, mert nincs 1-re végződő többszörösük.