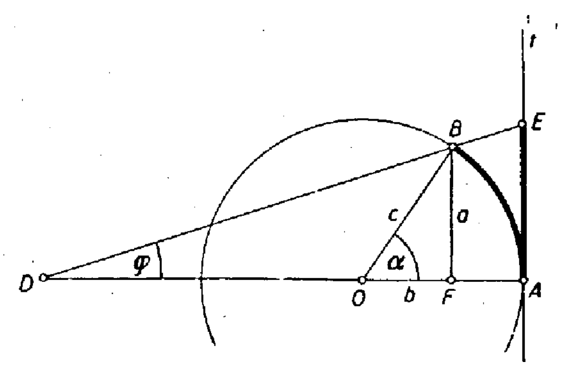
I. megoldás. I. Az utolsó kivételével mindegyik példában egy-egy 45° alatti, ill. fölötti hegyes szögre kapunk közelítést, az utolsó, egyenlő szárú háromszögből pedig 45°-ra. Így a $0° - 90°$ intervallum közepén és 8 kb. egyenletesen elosztott helyén kapjuk meg a közelítés mértékét.

Az alábbi táblázatban α az a befogóval szemben fekvő hegyes szögnek a függvénytáblázatból számított „pontos" értékét, α' pedig ugyanennek az adott képlettel számított közelítő értékét jelenti. Az utóbbit tetszés szerinti pontosságig számíthatnók, a-ban viszont a táblázat 4 értékes jegynyi pontosságára vagyunk korlátozva, ezért a'-t is csak 4 tizedesre számítjuk. A táblázat kerekítéseiből és az interpolációból eredő hibák kiegyenlítődésére számítva α értéke gyanánt a $\sin\alpha$-ból, $\cos\alpha$-ból, $\operatorname{tg}\alpha$-ból és $\operatorname{ctg}\alpha$-ból visszakeresett eredmények közepét vettük.

	a	b	c	α (fok) a (radián)	$a' = \dfrac{3a}{2c+b}$	$d = a' - a$	$\delta = \dfrac{\lvert d\rvert}{a}$	a''[1]
I.	11	60	61	$10{,}39° = 0{,}1813$	0,1813	0	0 %	10,384°
II.	51	140	149	$20{,}02° = 0{,}3494$	0,3493	$-1\cdot10^{-4}$	0,03 %	20,006°
III.	11	$\sqrt{3}$	2	$30° = 0{,}5236$	0,5234	$-2\cdot10^{-4}$	0,04 %	29,975°
IV.	88	105	137	$39{,}96° = 0{,}6974$	0,6966	$-8\cdot10^{-4}$	0,12 %	39,894°
V.	1	1	$\sqrt{2}$	$45° = 0{,}7854$	0,7836	$-18\cdot10^{-4}$	0,23 %	44,879°
IV.	105	88	137	$50{,}04° = 0{,}8734$	0,8702	$-32\cdot10^{-4}$	0,37 %	
III.	$\sqrt{3}$	1	2	$60° = 1{,}0472$	1,0392	$-80\cdot10^{-4}$	0,76 %	
II.	140	51	149	$69{,}98° = 1{,}2214$	1,2034	$-180\cdot10^{-4}$	1,5 %	
I.	60	11	61	$79{,}61° = 1{,}3895$	1,3534	$-361\cdot10^{-4}$	2,6 %	

(Példáinkban mind a négy könnyen számítható,) majd a táblázat felhasználásával számítottuk át radiánra.

A közelítés finomabb vagy durvább voltát kézenfekvő a'-nek a-tól való $d = a' - a$ eltéréséből megítélni. Gyakorlati célra azonban jellemzőbb és használatosabb a d/a hányados, ill. a $100d/a$ ún. relatív (százalékos) hiba. Mint látjuk, d mindig negatív, a közelítő érték kisebb a valódinál, és d abszolút értéke a-val rohamosan növekszik, $|d|/a$ már kisebb mértékben. 45°-on aluli szögekre a relatív hiba 1/4%-nál kisebb, így a közelítés jónak, 20°-on alul igen jónak mondható. Nyilvánvaló tehát, hogy ezzel az eljárással a derékszögű háromszög kisebb hegyes szögét célszerű közelíteni.



II. Legyen B vetülete OA-n F, és az OBF derékszögű háromszögben $FOB\sphericalangle = \alpha$, $FB = a$, $OF = b$, $OB = c$, így $DA = 3c$, $DF = 2c + b$. Ekkor egyrészt a DBF és DEA háromszögek hasonlóságából

$$AE : DA = FB : DF, \text{ és így}$$
$$AE = \frac{DA}{DF}\cdot FB = \frac{3ca}{2c+b} = c\cdot\frac{3a}{2c+b}c\cdot a',$$

másrészt az AB ív hossza $OA\cdot\alpha = c\cdot\alpha$ (α radiánban). Eszerint az AE szakasz ugyanazon mértékben közelíti az AB ívet, mint a képletünkből számított szögérték a háromszög szögét.

Dobó Ferenc (Budapest, I. István g. III. o. t.)

II. megoldás (a feladat II. részére). Legyen $BDO\sphericalangle = \varphi$, ekkor $DBO\sphericalangle = \alpha - \varphi$ és így a BDO háromszögből a szinusz-tétellel

$$\sin\varphi : \sin(\alpha - \varphi) = OB : OD = 1 : 2.$$

Innen az addíció-tétel felhasználásával

$$\left[\sin(\alpha-\varphi)=\right] \quad \sin\alpha\cos\varphi-\cos\alpha\sin\varphi=2\sin\varphi,$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=\frac{\sin\alpha}{2+\cos\alpha}=\frac{\frac{a}{c}}{2+\frac{b}{c}}=\frac{a}{2c+b},$$

végül $AE=DA\operatorname{tg}\varphi=3c\operatorname{tg}\varphi$-vel, ismét a fenti eredményre jutunk.

László Erika (Budapest, Varga K. lg. IV. o. t.)

Megjegyzések. I. A szóban forgó közelítő eljárásnak kényelmetlen eleme a radiánban való számolás. Radiánból fokra $180/\pi$-vel való szorzással térhetünk át. Ha ebben $\pi=3{,}14159\ldots$ helyett az ismert (Archimedésztől származó) $22/7=3{,}142\,85\ldots$ értéket használjuk, akkor fokban mérve

$$a\approx\frac{180\cdot 7}{22}\cdot\frac{3a}{2c+b}=\frac{630}{11}\cdot\frac{3a}{2c+b}=\frac{1890a}{11(2c+b)}.$$

A 22/7 érték kb. 0,04%-kal nagyobb π-nél, ezért a 630/11 arányossági tényező kb. 0,04%-kal kisebb a kelleténél. Eszerint az utóbbi képlet is alsó közelítést ad, és hibája valamivel nagyobb. Az adott számpéldákra az utóbbi képlet szerinti közelítő értéket (45°-ig) a táblázat a'' rovata tünteti fel.

2. Néhányan táblázat nélkül számították át fok-adataikat radiánra, éspedig a $\pi\approx 3{,}14$ közelítő érték alapján. Ebben csak 3 értékes jegy van, ennélfogva ugyanez áll minden vele végzett szorzásra, osztásra is. Így nem volt értelme a fok-eredményeket előzetesen 5 értékes jegyre kiszámítani (5 vagy többjegyű táblázatból).