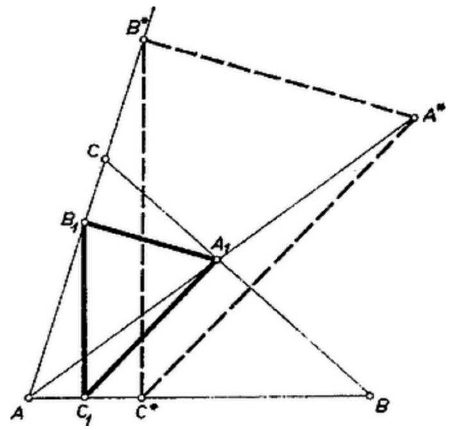
**I. megoldás.** 1. Szerkesztéssel az alábbiak szerint kaphatjuk a keresett $A_1$ pontot. Legyen $B^*$ az $AC$ egyenes tetszés szerinti, $A$-tól különböző pontja, $C^*$ ennek merőleges vetülete az $AB$ egyenesen, továbbá a $B^*$-ból $AC$-re és $C^*$-ból $BC$-re állított merőleges egyenesek metszéspontja $A^*$. Ekkor $A_1$ az $AA^*$ egyenesnek $BC$-vel való metszéspontja.



*1. ábra*

Jelöljük ugyanis $A_1$ vetületét $CA$-ra $B_1$-gyel, $B_1$ vetületét $AB$-re $C_1$-gyel. Ekkor $A_1B_1 \parallel A^*B^*$ és $B_1C_1 \parallel B^*C^*$, s így $AA_1B_1$ és $AA^*B^*$, továbbá $AB_1C_1$ és $AB^*C^*$ hasonló háromszögpárok. Ezekből

$$\frac{AA_1}{AA^*} = \frac{AB_1}{AB^*} \quad \text{és} \quad \frac{AB_1}{AB^*} = \frac{AC_1}{AC^*},$$

$$\text{s így} \quad \frac{AA_1}{AA^*} = \frac{AC_1}{AC^*}.$$

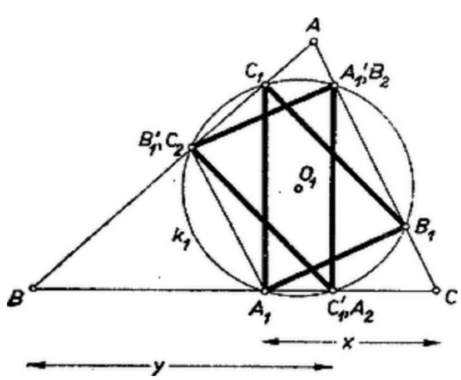
Ebből viszont következik az $AA_1C_1$ és $AA^*C^*$ háromszögek hasonlósága, mert egy szögük közös és az ezt bezáró oldalak aránya egyenlő. Ennek folytán $A_1C_1 \parallel A^*C^*$ tehát $A_1C_1 \perp BC$.

$A^*$ mindig létrejön és $A$-tól különböző, mert a $B^*$-ban $AC$-re állított merőleges nem megy át $A$-n és nem párhuzamos a $C^*$-ból $BC$-re állított merőlegessel.

Másrészt az $A_1$ csúcs (és vele együtt a többi is) egyértelműen meg van határozva, mert ha egy $A_1B_1C_1$ háromszög megfelel a feladat feltételeinek, akkor egy $A$ középpontú hasonlósági transzformációval $B_1$ csúcsa átvihető $B^*$-ba; ekkor azonban az egész háromszög az $A^*B^*C^*$ háromszögbe kell, hogy átmenjen, s így $A_1$ csak az $AA^*$ egyenesen (és másrészt a $BC$ oldalon) lehet.

Ugyanígy szerkeszthetünk a $BC$ egyenes egy pontjából kiindulva – az $A$ és $B$ csúcsok szerepének felcserélésével – egy háromszöget, melyből $B$ középpontú hasonlósági transzformációval kapható az $A_2B_2C_2$ háromszög, és ez is egyértelműen meg van határozva.

Tükrözzük az $A_1B_1C_1$ háromszöget a köréje írt $k_1$ kör $O_1$ középpontjára nézve, és legyen a csúcsok képe rendre $A_1'$, $B_1'$, $C_1'$. Megmutatjuk, hogy ezek egybeesnek a $B_2$, $C_2$, $A_2$ pontokkal. $C_1'$ a $BC$ egyenesen van, mert rajta van $k_1$-en, így a $C_1'A_1C_1$ szög derékszög, tehát a $C_1'A_1$ egyenes azonos $BC$-vel. Ugyanígy $A_1'$ a $CA$ egyenesen, $B_1'$ pedig $AB$-n van rajta.



*2. ábra*

Az $A_1'B_1'C_1'$ háromszög oldalai párhuzamosak az $A_1B_1C_1$ háromszög megfelelő oldalaival, tehát rendre merőlegesek az $ABC$ háromszög egy-egy oldalára (2. ábra):

$$C_1'B_1' \parallel C_1B_1 \perp BA, \qquad B_1'A_1' \parallel B_1A_1 \perp AC,$$

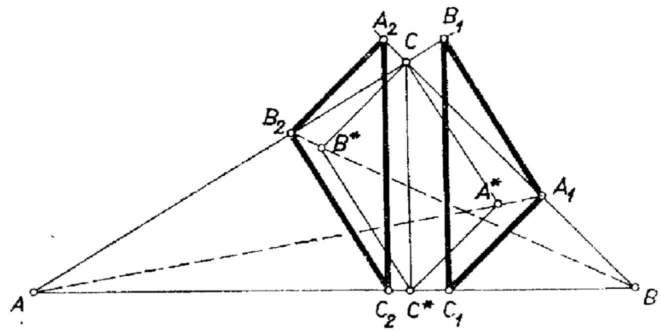
$$A_1'C_1' \parallel A_1C_1 \perp CB.$$

Eszerint a $C_1'$, $A_1'$, $B_1'$ pontoknak rendre megvan az a tulajdonsága, amelyet $A_2$, $B_2$, $C_2$-től kívánunk. Ámde láttuk, hogy $A_2$, $B_2$, $C_2$ a követelményekkel egyértelműen meg van határozva, tehát az $A_2B_2C_2$ háromszög azonos a $C_1'A_1'B_1'$ háromszöggel és – azonos körüljárással – egybevágó annak az $O_1$ pontra vonatkozó $C_1A_1B_1$ tükörképével.

Ezzel az állítást bebizonyítottuk, egyszersmind a feladatban kimondott egybevágóságban a csúcsok megfelelő párjait is megállapítottuk.

*Lehel Jenő* (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. III. o. t.)

**II. megoldás.** Származtathatjuk az $A_1B_1C_1$ és az $A_2B_2C_2$ háromszöget is egy-egy olyan háromszög kicsinyítésével, amelynek $AB$-re merőleges oldala a $CC^*$ magasság. Legyen a $C$-n át $AC$-re és $C^*$-on át $BC$-re merőlegesen húzott egyenesek metszéspontja $A^*$, a $C$-n át $BC$-re és $C^*$-on át $AC$-re merőlegesen húzott egyeneseké pedig $B^*$. Ekkor $A_1$-et az $AA^*$ egyenes metszi ki $BC$-ből, $B_2$-t pedig a $BB^*$ egyenes $AC$-ből. Ezekből a pontokból megrajzolva az $A_1B_1C_1$, ill. $A_2B_2C_2$ háromszöget, ezek megfelelnek a feladat követelményeinek, és csak egy-egy ilyen háromszög létezik, amint azt az I. megoldásban beláttuk.



*3. ábra*

Ez a két háromszög az egymással egybevágó $A^*CC^*$, ill. $B^*C^*C$ háromszögből hasonlósági transzformációval keletkezett, a hasonlóság aránya $AA_1/AA^*$, ill. $BB_2/BB^*$. Így az $A_1B_1C_1$ és $A_2B_2C_2$ háromszög egybevágó volta következik abból, ha bebizonyítjuk e két arány egyenlőségét. Evégett megmutatjuk, hogy $AA^*C$ és $BB^*C$ hasonló háromszögek és $CA_1$, $CB_2$ bennük egymásnak megfelelő egyenesek.

Mivel az $A^*CC^*$ háromszög oldalai merőlegesek a $CAB$ háromszög megfelelő oldalaira, így a két háromszög hasonló, és ebből

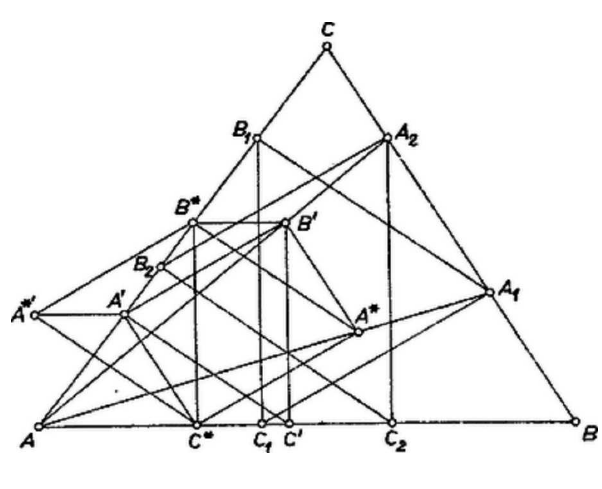
$$\frac{A^*C}{CA} = \frac{A^*C^*}{CB} = \frac{B^*C}{CB}.$$

Az $AA^*C$ és $BB^*C$ háromszögekben tehát, melyek $C$-nél derékszögűek, a befogók aránya megegyezik, s így a két háromszög hasonló.

Az $A_1C$ egyenesnek a $CA^*$ befogóval és a $B_2C$ egyenesnek a $CB^*$ befogóval bezárt szöge egyaránt az $ACB$ szög eltérése $90°$-tól. $A_1$ is, $B_2$ is a megfelelő átfogó pontja, ha $ACB\sphericalangle \leqq 90°$, és az átfogók $A^*$-on, ill. $B^*$-on túli meghosszabbítására esnek, ha $ACB\sphericalangle > 90°$. Így $CA_1$ és $CB_2$ a két hasonló derékszögű háromszögre nézve egymásnak megfelelő szakaszok, ennélfogva $AA_1/AA^* = BB_2/BB^*$, és ezt akartuk bizonyítani.

*Szidarovszky Ferenc* (Budapest, Fazekas M. gyak. g. III. o. t.)

**III. megoldás.** Szerkesszünk meg egy $A^*B^*C^*$ háromszöget, mint az I. megoldásban, és legyen $A^*$ tükörképe $B^*C^*$ középpontjára $A^{*\prime}$. Ekkor az $A^{*\prime}B^*C^*$ háromszög oldalai rendre a $CB$, $BA$, $AC$ oldalakra merőlegesek, ugyanúgy, mint azt a $B_2A_2C_2$ háromszög egymás utáni oldalaitól kívánja a feladat. Ha ezt a háromszöget még eltoljuk az $AB$ egyenessel párhuzamosan úgy, hogy $A^{*\prime}$ az $AC$ oldalra kerüljön, akkor a keletkező $A'B'C'$ háromszöget $A$ középpontú hasonlósági transzformáció viszi át $B_2A_2C_2$-be, hasonlóan, mint az $A^*B^*C^*$ háromszöget $A_1B_1C_1$-be.



*4. ábra*

Azt kell még megmutatnunk, hogy a két esetben ugyanazt a hasonlósági transzformációt kell alkalmazni. Ez következik abból, ha megmutatjuk, hogy $A^*B' \parallel BC$, mert a hasonlósági transzformáció minden egyenest vele párhuzamos egyenesbe visz át, tehát az említett párhuzamosság esetén az $A^*$-ot $A_1$-be átvivő transzformáció $B'$-t is a $BC$ egyenesen levő pontba viszi át.

A kívánt párhuzamosság viszont következik abból, ha megmutatjuk, hogy $A'C^* \parallel BC$, vagyis az $AC^*A'$ és $ABC$ háromszögek hasonlók, mert $A^*C^*$ és $B'A'$ párhuzamos és egyenlő szakaszok, tehát $A^*B'A'C^*$ paralelogramma.

Az $AA'C'$ és $AB^*C^*$ háromszögek hasonlók, mert mindkettő derékszögű és $A$-nál levő szögük közös, vagy az egyik a másiknak csúcsszöge (ha a $BAC$ szög tompaszög). Így $AA'/AC^* = A'C'/C^*B^*$. De $A'C' = B^*A^*$ és $B^*A^*/C^*B^* = AC/BA$, mert az $A^*B^*C^*$ és a $CAB$ háromszög megfelelő oldalai egymásra merőlegesek, s így a háromszögek hasonlók.

Azt kaptuk tehát, hogy az $ABC$ és $AC^*A'$ háromszögekben, amelyeknek az $A$-nál levő szögei egybeesnek vagy csúcsszögek, az ezt közrefogó, megfelelő oldalak aránya megegyezik. Így $A'C^* \parallel CB$. Mint láttuk, ebből következik, hogy az $ABC$ háromszögbe lehet beírni két egybevágó háromszöget, melyeknek oldalai merőlegesek az előírt sorrendben az $ABC$ háromszög oldalaira. Mivel az előírásoknak megfelelő háromszögek egyértelműen meg vannak határozva – lásd az I. megoldást –, így a feladat állítása bizonyítást nyert.

**IV. megoldás.** $A_1$ és $A_2$ helyzetét számítással is meghatározhatjuk a háromszög (szokás szerint jelölendő) oldalaiból és szögeiből. Legyen $CA_1 = x$, a $C$-ből $B$ felé mutató irányt véve pozitívnak. (A $B_1$, $C_1$, $A_2$, $B_2$, $C_2$ csúcsokat is az $ABC$ háromszög megfelelő két csúcsától mért távolságukkal határozzuk meg, pozitívnak mindig a szóban forgó oldal másik végpontja felé mutató irányt vesszük.) Ebből, a koszinuszokat természetesen előjellel értve (2. ábra):

$$CB_1 = x\cos\gamma, \qquad AB_1 = b - x\cos\gamma, \qquad AC_1 = b\cos\alpha - x\cos\alpha\cos\gamma,$$

$$BC_1 = c - b\cos\alpha + x\cos\alpha\cos\gamma = a\cos\beta + x\cos\alpha\cos\gamma$$

(felhasználtuk a $b\cos\alpha + a\cos\beta = c$ összefüggést). Most már a követelmény figyelembevételével

$$BA_1 = BC_1\cos\beta = a\cos^2\beta + x\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = a - x, \quad \text{és így}$$

$$x = \frac{a\sin^2\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}.$$

Hasonlóan $BA_2 = y$-nal kifejezve rendre a $BC_2$, $AC_2$, $AB_2$, $CB_2$ szakaszt, felhasználva a $c\cos\alpha + a\cos\gamma = b$ összefüggést, a $CA_2 = a - y = CB_2\cos\gamma$ követelményből

$$y = \frac{a\sin^2\gamma}{1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}.$$

Így $x$ és $y$, ill. $A_1$ és $A_2$, ill. velük az $A_1B_1C_1$ és $A_2B_2C_2$ háromszögek mindig egyértelműen meg vannak határozva, mert a nevező sohasem 0, ugyanis a koszinuszok szorzata abszolút értékben kisebb 1-nél.

A kérdéses egybevágóság most már következik abból, ha megmutatjuk, hogy a $B_1C_1A_1$ és $C_2A_2B_2$ háromszögekben – melyeknek szögei rendre egyenlőek az $ABC$ háromszög szögeivel, és így hasonlók egymáshoz –, egy pár megfelelő oldal egyenlő. Az első háromszögnek az $A_1C_1B_1 = \beta$ szöggel szemben fekvő oldala a szinusz tétel felhasználásával

$$A_1B_1 = x\sin\gamma = \frac{a\sin^2\beta\sin\gamma}{1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma} = \frac{b\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}.$$

Hasonlóan

$$A_2C_2 = y\sin\beta = \frac{c\sin\alpha\sin\gamma\sin\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}.$$

A második háromszögben a szinusz tétel alapján

$$\frac{B_2C_2}{A_2C_2} = \frac{\sin B_2A_2C_2\sphericalangle}{\sin A_2B_2C_2\sphericalangle} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{b}{c},$$

és így

$$B_2C_2 = \frac{b}{c}\cdot A_2C_2 = A_1B_1,$$

ami állításunkat igazolja.

*Gálfi László* (Budapest, I. István g. IV. o. t.)