[1]
$\sqrt{2} = 1{,}414\,213\ldots$ és $\sqrt{51} = 7{,}141\,428\ldots$, tehát az állítás igaz. Eszerint fennáll a következő közelítő egyenlőség:

$$\sqrt{51} \approx 7 + \frac{\sqrt{2}}{10}, \tag{1}$$

amiből négyzetre emeléssel és rendezéssel

$$\sqrt{2} \approx \frac{99}{70} = 1{,}41\,428\ldots, \tag{2}$$

Ez ugyancsak 5 értékes jegyben egyezik meg $\sqrt{2}$-vel.

A 945. feladat[2] az $x_1 = 2,\ \ y_1 = 3$, és $k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ esetén $x_{k+1} = 3x_k + 2y_k,\ \ y_{k+1} = 4x_k + 3y_k$ képletekkel adott sorozatokból adódó y_k/x_k törteket adta meg mint $\sqrt{2}$ közelítő értékeit. Ezekben a sorozatokban a harmadik tag $x_3 = 70,\ \ y_3 = 99$.

Simonyi Ernő (Budapest, Rákóczi F. g. III. o. t.)

Megjegyzés. Vajon az említett sorozatpárból lehet-e kapni az 51-en felül további olyan a számokat, melyeknek négyzetgyökében az első valahány tizedes jegy megegyezik $\sqrt{2}$ tizedestört alakjának egymás utáni jegyeivel, vagyis amelyre

$$\sqrt{a} \approx b + \frac{\sqrt{2}}{10}, \qquad \text{és ebből} \qquad \sqrt{2} \approx \frac{50(a-b^2)-1}{10b}? \tag{3}$$

A $\sqrt{2}$-re adódó közelítő érték nevezője tehát 0-ra, számlálója pedig 49-re vagy 99-re végződik. Ilyen x_k, y_k párokat akarunk tehát keresni. Könnyítést jelentenek 0-ra végződő nevező keresésében az 1062. feladatban[3] nyert

$$x_k = 6x_{k-1} - x_{k-2} = 34x_{k-2} - x_{k-4} = 198x_{k-3} - x_{k-6}$$

kifejezések, amelyekkel az y-sorozat tagjainak kiszámítása nélkül juthatunk előre. Egyelőre elég a tagok utolsó jegyét vizsgálni. $x_1 = 2$, $x_2 = 12$ és $x_3 = 70$-ből x_4 utolsó szemjegye 8-as, ugyanígy x_5-é is, majd x_6-é ismét 0. A fenti 3-ik kifejezéssel – és az 1061. feladatban nyert $x_0 = 0$-val $x_6 = 198 \cdot 70 - 0 = 13\,860$. Egyszersmind látjuk, hogy az x sorozat minden harmadik tagja 0-ra végződik, köztük pedig váltakozva két–két 2-re, ill. 8-ra végződő tag áll. Az 1062. feladat további képleteivel $y_6 = 19\,601$, ez nem felel meg (3)-ban a számlálónak. Könnyű belátni azonban[4] $y_k = 198y_{k-3} - y_{k-6}$, és $y_0 = 1$, $y_3 = 99$-ből, hogy az y_{3k} tagok váltakozva 1-re és 9-re végződnek, tehát y_9 egyjegyű végződése megfelelő. Valóban, $y_9 = 198 \cdot 19\,601 - 99 = 3\,880\,899 = 50 \cdot 77\,618 - 1$, és mivel $x_9 = 198 \cdot 13\,860 - 70 = 2\,744\,210 = 10b$-ből $b = 274\,421$, azért $50(a - b^2) - 1 = y_9$-ből $a = b^2 + 1(1 + y_9)/50 = 75\,306\,962\,859$ egy a kívánt tulajdonsággal bíró szám. Ezzel

$$\sqrt{a} = 274\,421,\ \underbrace{141\,421\,356\,237\,3}\ 140\ldots,$$

és itt a tizedes vessző után $\sqrt{2}$-nek 13 helyes jegye áll.

---

[1] Lásd K. M. L. 23 (1961/9) 62. o.
[2] K. M. L. 19 (1959/10) 56. o.
[3] K. M. L. 23 (1961/10) 64. o.
[4] K. M. L. 23 (1961/10) 64. o.