I. A feltevés szerint az a, b, c természetes számok egy derékszögű háromszög oldalhosszai. Az (1)-beli negyedik kifejezés beszorzással és a feltevés alapján

$$2c^2 = a^2 + b^2 + c^2 \tag{3}$$

helyettesítéssel így írható:

$$\begin{aligned} 2(c+a)(c+b) = 2c^2 + 2(ab+ac+bc) = a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc) = \\ = (a+b+c)^2, \end{aligned} \tag{4}$$

tehát ez a szorzat az $a+b+c$ természetes szám négyzete.

Az (1) alatti második és harmadik szorzat úgy áll elő a negyedikből, hogy a helyett $-a$-t, ill. b helyett $-b$-t írunk, az első szorzat pedig e két változtatás egyidejű végrehajtásával. Mindhárom változtatás mellett érvényben marad (3), ezért az első három szorzat rendre egyenlő a következő négyzetekkel:

$$(-a-b+c)^2 = (a+b-c)^2, \qquad (-a+b+c)^2, \qquad (a-b+c)^2,$$

ahol az alapok ismét egész számok. Eszerint az első állítás helyes. – (A (4) és belőle következő egyenlőségek minden derékszögű háromszögben érvényesek, ugyanis megállapításukban nem használtuk ki a, b, c egész voltát.)

II. Vegyük (4) mindkét oldalának pozitív négyzetgyökét:

$$\sqrt{2(c+a)(c+b)} = a+b+c = (c+a)+(c+b)-c.$$

Ez azt jelenti, hogy az $x_1 = c+a$, $y_1 = c+b$ számpárra

$$\sqrt{2x_1y_1} = x_1+y_1-c, \qquad x_1+y_1-\sqrt{2x_1y_1} = c,$$

azaz teljesül a (2) alatti második egyenlet.

Hasonlóan kapunk megoldásokat ugyanezen egyenletre, ha vesszük az (1) alatti 2. és 3. szorzatból kapott egyenlőség mindkét oldalának pozitív négyzetgyökét és a jobb oldalon kis átalakítást végzünk:

$$\begin{gathered} \sqrt{2(c-a)(c+b)} = -a+b+c = (c-a)+(c+b)-c \text{ -ből} \\ x_2 = c-a, \qquad y_2 = c+b, \\ \sqrt{2(c+a)(c-b)} = a-b+c = (c+a)+(c-b)-c \text{ -ből} \\ x_3 = c+a, \qquad y_3 = c-b, \end{gathered}$$

ugyanis a háromszögegyenlőtlenség folytán $-a+b+c>0$ és $a-b+c>0$.

Az (1) alatti első szorzatra kapott egyenlőség viszont ugyanígy (2) első egyenletére ad megoldást:

$$\sqrt{2(c-a)(c-b)} = a+b-c = c-(c-a)-(c-b)$$

-ből, ahol a háromszög-egyenlőtlenség szerint $a+b-c>0$, $x_0 = c-a$, $y_0 = c-b$-vel $\sqrt{2x_0y_0} = c-x_0-y_0$, vagyis valóban teljesül

$$x_0+y_0+\sqrt{2x_0y_0} = c.$$

Ezek szerint ha c egy pythagoraszi számhármas átfogószáma, akkor a (2) egyenletek megoldhatók egész számokban, sőt pozitív egész számokban, az

$$x_0 = c-a, \quad y_0 = c-b, \qquad \text{ill.} \qquad \begin{aligned} x_1 &= c+a, & y_1 &= c+b, \\ x_2 &= c-a, & y_2 &= c+b, \\ x_3 &= c+a, & y_3 &= c-b \end{aligned}$$

számpárok – ahol a és b a c átfogószámhoz tartozó befogószámok – mindenesetre megoldást adnak. Ezeken felül magától értetődő (ún. triviális) megoldás mindkét egyenletre $x=c$, $y=0$, továbbá a másodikra $x=c$, $y=2c$, és természetesen bármely megoldásban x és y felcserélésével ismét megoldást kapunk. Ezeket alább figyelmen kívül hagyjuk.

Megmutatjuk még, hogy a fentieken felül más megoldásuk nincs a (2) egyenleteknek. Ezeket

$$\sqrt{2xy} = c-x-y, \qquad -\sqrt{2xy} = c-x-y$$

alakban írva és négyzetre emelve a

$$2xy = c^2-2cx+x^2-2cy+y^2+2xy,$$

másképpen a

$$(c-x)^2+(c-y)^2=c^2 \tag{5}$$

egyenletre jutunk. Ez mindkét egyenletünknek következménye, vagyis a (2) egyenleteket más gyök nem elégítheti ki, mint (5)-öt. Ez azt jelenti, hogy vagy $|c-x|$, $|c-y|$ egyike 0, a másik c, vagy e két szám (mint befogószám) és c pythagorászi számhármast alkot. Így valóban a két egyenlet összes megoldásai csak az $x=c$, $y=0$; $x=c$, $y=2c$ számpárok, továbbá ha létezik c átfogószámmal pythagorászi számhármas, minden ilyen a, b, c számhármashoz az $x=c\mp a$, $y=c\mp b$ számpárok. Azt az előzőkben már tisztáztuk, hogy ezek közül melyikek az első és melyikek a második egyenlet megoldásai.

III. Meg kell keresnünk a $c=13$ és $c=50$ átfogószámokhoz tartozó befogó számpárokat (ha egyáltalán léteznek). Minden pythagorászi számhármast megad a következő éplethármas:

$$a=k(u^2-v^2),\qquad b=k\cdot 2uv,\qquad c=k(u^2+v^2), \tag{6}$$

ahol u, v relatív prim természetes számok, egyikük páros, és $u>v$, továbbá k tetszés szerinti természetes szám. $k=1$ esetén alap hármasokat kapunk, azaz a, b, c relatív prímek.

Mivel $c=13$ törzsszám, itt csak $k=1$ lehet, másrészt $u^2+v^2=13$ csak $u=3$, $v=2$-vel adódik ki, tehát a számhármas: 5, 12, 13. Így a (2) alatti első egyenlet megoldásai: $x_0=13-5=8$, $y_0=13-12=1$, a második egyenletéi pedig: $x_1=18$, $y_1=25$; $x_2=8$, $y_2=25$; $x_3=18$, $y_3=1$.

$c=50=2\cdot 5^2$. Nem lehet $k=1$, vagy 5, mert 50, ill. 10 páros, nem állítható elő egy páros és egy páratlan négyzetszám összegeként. Így vagy $k=2$ és $u^2+v^2=25$ – amiből $u=4$, $v=3$ –, vagy $k=10$ és $u^2+v^2=5$, amiből $u=2$, $v=1$, tehát két számhármast kapunk: 14, 48, 50 és 30, 40, 50. Ezekből a megoldást adó számpárok az első egyenletre 2, 36 és 10, 20, a másodikra pedig 36, 98; 2, 64; 64, 98; 20, 90; 10, 80; 80, 90.

Kobzos László (Vác, Lőwy S. gépip. t. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. A II. szakasz második részében nemcsak azt láttuk be, hogy a találtakon kívül nincs egész megoldása az egyenleteknek, hanem megkaptuk ezeket a megoldásokat az első rész és I. felhasználása nélkül.

2. Az első állítás a (6) képlet hármas felhasználásával is igazolható, a négy szorzat rendre így alakul:

$$[2kv(u-v)]^2,\qquad [2kv(u+v)]^2,\qquad [2ku(u-v)]^2,\qquad [2ku(u+v)]^2.$$