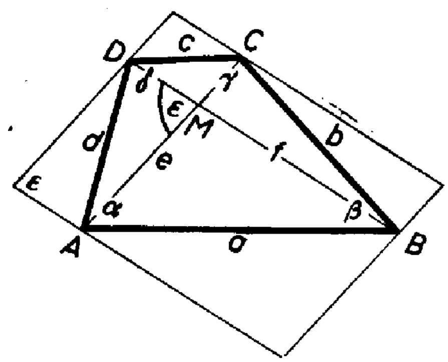
I. Legyenek az ABCD négyszög oldalai $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, egyik átlója $BD = f$, az ezzel szemben levő szögek $BAD\sphericalangle = \alpha$, $BCD\sphericalangle = \gamma$, végül a területe t.



Az ABD és CBD háromszögekből a BD átlóra és a négyszög 4-szeres területére

(1) $$f^2 = a^2 + d^2 - 2\,ad\cos\alpha = b^2 + c^2 - 2bc\,\cos\gamma,$$

(2) $$2ad\,\sin\alpha + 2bc\,\sin\gamma = 4t.$$

Átrendezéssel (1)-ből

(3) $$2ad\,\cos\alpha - 2bc\,\cos\gamma = a^2 + d^2 - b^2 - c^2.$$

Képezzük (2) és (3) négyzetösszegét, mindjárt figyelembe véve a

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \text{s} \quad \cos x\,\cos y - \sin x\,\sin y = \cos(x+y) \quad \text{azonossgokat:}$$

$$4a^2d^2 + 4b^2c^2 - 8abcd\,\cos(\alpha+\gamma) = 16t^2 + \left(a^2 + d^2 - b^2 - c^2\right)^2.$$

Innen

(4) $$16t^2 = 4a^2d^2 + 4b^2c^2 - \left[(a^2+d^2) - (b^2+c^2)\right]^2 - 8abcd\,\cos(\alpha+\gamma)^1$$

Adott a, b, c, d mellett a jobb oldal első 3 tagja állandó, ezért $16t^2$ és vele t akkor a legnagyobb, ha az utolsó tag a legnagyobb; ez pedig akkor áll be, ha $\cos(\alpha+\gamma)$ a lehető legkisebb értékét, -1-et veszi fel. Ekkor

$$16t^2_{\max} = 256 + 1296 - [65 - 45]^2 + 1152 = 2304,$$

ahonnan $t_{\max} = 12$ területegység, hacsak létezik olyan négyszög, melynek egymás utáni oldalai az adott szakaszok, továbbá, amelyben a $\cos(\alpha+\gamma) = -1$, azaz $\alpha + \gamma = 180°$ kiegészítő feltétel is teljesül. Ekkor $\cos\gamma = -\cos\alpha$, és így (3)-ból, majd (1)-ből

$$\cos\alpha = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)} = \frac{5}{13}, \qquad f \approx 7{,}671 \text{ egység.}$$

Ez mind az a, d, mind a b, c oldalpárral háromszöget alkot, tehát a kérdéses négyszög létezik.

Azt is látjuk a szög–feltételből, hogy négyszögünk húrnégyszög, és hogy bármely a, b, c, d oldalhosszak mellett – ha egyáltalán létezik a négyszög – a húrnégyszögnek van maximális területe.

II. (4) jobb oldalát a $\cos(\alpha+\gamma) = -1$ feltétel mellett kifejtve

$$\begin{aligned} 16t^2_{\max} = 2(a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2)-\\ -(a^4 + b^4 + c^4 + d^4) + 8abcd.\end{aligned}$$

Ebben a kifejezésben a, b, c, d mindegyike egyforma szerepet játszik, eszerint $t_{\max}$ értéke független az oldalak sorrendjétől (természetesen ismét számadatainktól is függetlenül).

Bellay Ágnes (Budapest, Fazekas M. gyak. g. IV. o. t.)

[1] (4)-et a K. M. L. 23 (1961/11) 132. o. aljáról készen átvehettük volna, azonban új olvasóinkra tekintettel inkább levezettük.