I. megoldás. A bal oldali hányadosnak minden (valóságos) háromszögben van értelme, mert a nevező sohasem 0. Ugyanis a koszinusz függvény (0°-tól 180°-ig) csökkenő, tehát

$$\cos\alpha+\cos\beta>\cos\alpha+\cos(\beta+\gamma)=\cos\alpha+\cos(180^\circ-\alpha)=0.$$

A feltevésből átszorzással és 0-ra redukálással

$$\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma(\cos\alpha+\cos\beta)=0.$$

Innen $\sin\gamma=\sin\left[180^\circ-(\alpha+\beta)\right]=\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\,\cos\beta+\cos\alpha\,\sin\beta$ beírásával, a négyzetes összefüggés alapján, majd szorzattá alakítással $(\sin\alpha+\sin\beta)-\sin\alpha\,\cos\beta-\cos^2\alpha\,\sin\beta-\sin\alpha\,\cos^2\beta-\cos\alpha\,\sin\beta\cos\beta=(\sin\alpha+\sin\beta)(1-\cos\alpha\,\cos\beta)-(1-\sin^2\alpha)\,\sin\beta-\sin\alpha(1-\sin^2\beta)=(\sin\alpha+\sin\beta)(-\cos\alpha\,\cos\beta+\sin\alpha\,\sin\beta)=-(\sin\alpha+\sin\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta)=0$.
Mivel $\sin\alpha+\sin\beta$ mindkét tagja pozitív, tehát összegük $\neq 0$, azért innen $\cos(\alpha+\beta)=0$, azaz $\alpha+\beta=90^\circ$, az állításnak megfelelően. Eszerint a γ szög derékszög.

Koplányi Erzsébet (Budapest, Zrínyi I. lg. II. o. t.)

II. megoldás. (1) bal oldalán a számlálót és a nevezőt szorzattá alakítva, a jobb oldalon pedig a $\sin x=2\sin x/2\,\cos x/2$ azonosság alapján:

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\frac{2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}},$$

$$\sin\gamma=\sin(\alpha+\beta)=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

A kapott két kifejezés egyenlőségéből, a 0-tól különböző számlálóval egyszerűsítve

$$\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{1}{2},\qquad \cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad \frac{\alpha+\beta}{2}=45^\circ,\qquad \alpha+\beta=90^\circ,$$

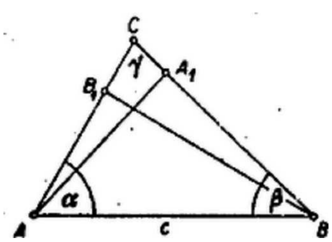
ugyanis $\alpha+\beta<180^\circ$, $(\alpha+\beta)/2<90^\circ$, tehát koszinusza pozitív.

Udvardy Antal (Budapest, Táncsics M. g. III. o. t.)

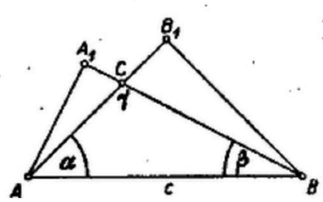
III. megoldás. Megmutatjuk, hogy ha γ hegyesszög, vagy ha tompaszög, akkor a feltevés nem teljesülhet. Rendezéssel és a szinusz-tétel felhasználásával (1) így alakítható:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}+\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}=\cos\alpha+\cos\beta,\qquad \frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\cos\alpha+\cos\beta,$$

$$a+b=c\cos\alpha+c\cos\beta. \tag{2}$$



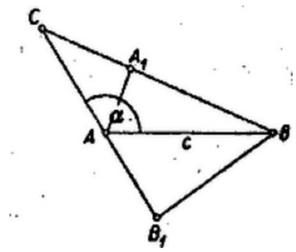
1. ábra



2. ábra

Ha α és β hegyesszögek, akkor a jobb oldal tagjai az AB_1, BA_1 szakaszok hosszát adják, ahol A_1, B_1 magasságtalppontok (1. ábra). Mármost ha γ hegyesszög, akkor $AB_1<AC=b$, $BA_1<BC=a$, tehát $c\,\cos\alpha+c\,\cos\beta<a+b$, ellentétben a feltevés (2) alakjával. Ha pedig γ tompaszög, akkor $AB_1>AC$, $BA_1>BC$, és így $c\,\cos\alpha+c\,\cos\beta>a+b$ (2. ábra).

Ha α és β egyike, pl. α nem hegyes szög: $\alpha\geq 90^\circ$, akkor γ hegyes szög, és ismét az előbbi első esetre jutunk, ugyanis ekkor is fennáll $c\cos\alpha\leq 0<b$ (3. ábra).



3. ábra

Könnyű belátni viszont, hogy, $\gamma = 90^\circ$ esetén (1) teljesül, így ugyanis $\cos\alpha = \sin\beta$, $\cos\beta = \sin\alpha$ és mindkét oldalon 1 áll.

Lippai Pál (Szeged, Radnóti M. g. IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. A (2) összefüggést (1)-nek abc-vel való szorzásával, majd a terület 2-szeresével való osztásával is megkaphatjuk:

$$\frac{a(bc\sin\alpha)+b(ac\sin\beta)}{\cos\alpha+\cos\beta} = c(ab\sin\gamma), \qquad \frac{a+b}{\cos\alpha+\cos\beta} = c.$$

Parragh Zoltán (Budapest, I. István g. III. o. t.)

2. Számos dolgozat az állítás fordítottját bizonyította, vagyis hogy derékszögű háromszögben fennáll (1). Ezek a kitűzött feladatot nem oldották meg.