Az idézett számhármas-párokban az 1, ill. 2 kitevőjű hatvány-összegek egyenlők, ugyanis I-ben: $38+108+268=8+168+238=414$, ill. $38^2+108^2+268^2=8^2+168^2+238^2=84\,932$, hasonlóan II-ben: 90 621, ill. 4 549 468 547, III-ban: 909, ill. 414 041, végül IV-ben: 520, ill. 149 432 az összegek értéke. Eszerint az 1065. feladat tétele érvényes mind a négy számhármas-párra. (A 3-as kitevőjű hatványösszegek különbözőségének ellenőrzését mellőzhetjük, mert a feladat megoldását áttekintve látjuk, hogy a 3 kitevőjű hatványösszegek különbözőségét csak annak bizonyításában használtuk fel, hogy (1) az $m=4$ érték mellett nem teljesül. Itt viszont nincs szó a 4 kitevőjű hatványösszegekről.) Eszerint bármely k-val teljesül $m=1,\ 2,\ 3$ mellett pl. a

$$\begin{aligned}38^m+108^m+268^m+(8+k)^m+(168+k)^m+(238+k)^m=&\\ =8^m+168^m+238^m+(38+k)^m+(108+k)^m+(268+k)^m&\end{aligned} \qquad \mathrm{I}^*$$

egyenlőség. – A 6-tagú számcsoportoknak 4-tagúakká való egyszerűsödése nem jöhet létre 0-értékű tagok miatt, mert I* tagjaiban a k szám csupa különböző szám mellett lép fel, így pedig legfeljebb egy tagot tehetünk 0-vá k alkalmas választásával. Az egyszerűsödés tehát csak úgy állhat be, ha alkalmas k-val I* két oldalán két-két egyenlő alap lép fel, és ezek a tagok m minden értéke mellett kiesnek. Azt kell tehát bebizonyítanunk, hogy van ilyen k. Az egyenlő alapok egyikének (1)-ben tartalmaznia kell k-t, a másiknak viszont „k-mentes"-nek kell lennie, ugyanis mind a k-mentes tagok, mind a k-t tartalmazó tagok egymás között különbözők. Nem lehet szó továbbá pl. a 38 és $38+k$ alapok egyenlőségéről sem, mert evvel $k=0$, és I*-ból minden tag kiesik. Ezek szerint a bal oldal mindegyik tagja a jobb oldal 2 tagjával lehet egyenlő, pl.

$$\begin{array}{ccc}38=108+k, & \text{vagy} & 38=268+k,\ \text{amiből}\\ k=-70, & \text{ill.} & k=-230.\end{array}$$

Ha mind a $6\cdot 2=12$ ilyen egyenletből a megfelelő k-t kiszámítva valamely k-értéket legalább 2-szer kapunk meg, éspedig I*-nak két-két különböző tagjából, akkor ezzel a k értékkel I* két oldalán valóban csak 4–4 különböző tag marad vissza. Mármost

$$\begin{array}{lll|lll}108=38+k\text{-ból} & k= & 70, & 108=268+k\text{-ból} & k= & -160;\\ 268=38+k & ,, & k=230, & 268=108+k & ,, & k=160;\\ 8+k=168 & ,, & k=160, & 8+k=238 & ,, & k=230;\\ 168+k=8 & ,, & k=-160, & 168+k=238 & ,, & k=70;\\ 238+k=8 & ,, & k=-230, & 238+k=168 & ,, & k=-70.\end{array}$$

Ezek szerint I* a $k=\pm70$, ±160 és ±230 számok mindegyikével 4–4 tagúra egyszerűsödik, pl. $k=-230$-cal kiesnek 38 és $268+k$, valamint $238+k$ és 8, a maradó

$$108^m+268^m+(-222)^m+(-62)^m \quad \text{és} \quad 168^m+238^m+(-192)^m+(-122)^m$$

kifejezések értéke pedig $m=1$ mellett 92, $m=2$ mellett 136 616 és $m=3$ mellett 9 329 168.

Általában, az I. és II. számhármas-párok közös

$$\begin{array}{lll}a_1=q+r, & a_2=p+r, & a_3=2p+2q+r;\\ b_1=r, & b_2=p+2q+r, & b_3=2p+q+r\end{array}$$

képletéből[1] a tétel alkalmazásával előálló

(2) $$a_1,\ a_2,\ a_3,\ b_1+k,\ b_2+k,\ b_3+k;\ \ b_1,\ b_2,\ b_3,\ a_1+k,\ a_2+k,\ a_3+k$$

számhatos-párban

(3) $$\begin{array}{lllll}a_1=a_2+k, & \text{és} & b_2=b_3+k, & \text{ha} & k=-p+q;\\ a_1=a_3+k, & \text{és} & b_1=b_3+k, & \text{ha} & k=-2p-q;\\ a_2=a_1+k, & \text{és} & b_3=b_2+k, & \text{ha} & k=\ \ p-q;\\ a_2=a_3+k, & \text{és} & b_1=b_2+k, & \text{ha} & k=\ -p-2q;\\ a_3=a_1+k, & \text{és} & b_3=b_1+k, & \text{ha} & k=2p+q;\ \text{végül}\\ a_3=a_2+k, & \text{és} & b_2=b_1+k, & \text{ha} & k=p+2q.\end{array}$$

[1] Lásd az 1048. feladat fentebb idézett megoldását.

Innen a paraméterek $p = 30\,000$, $q = 200$, $r = 7$ értékrendszerével adódó II számhármas-párra is 6 megfelelő értéket kapunk:

$$k = \pm 29\,800, \quad \pm 30\,400, \quad \pm 60\,200.$$

A III és IV számcsoportok esetében a fentiek szerinti 12 egyenlőség mindegyikéből más-más k-érték adódik, abszolút értékben nagyság szerint rendezve a következők:

$$\begin{array}{lllllll}
\text{III-ból:} & \pm\ \ 95, & \pm 104, & \pm 395, & \pm 401, & \pm 496, & \pm 499; \\
\text{IV-ből:} & \pm 136, & \pm 158, & \pm 186, & \pm 206, & \pm 342, & \pm 344.
\end{array}$$

Ezekkel a 6-tagú csoportokból csak 1–1 tag esik ki, tehát a csoportok valóban csak 5-tagúra egyszerűsödhetnek.

Seprődi László (Budapest, Fáy A. g. IV. o.)