a) Oldjuk meg (1)-et y-ra. Átrendezve, majd az oldóképlettel:

$$y^2-2(x+1)y+(x-1)^2=0,$$

$$y=x+1\pm 2\sqrt{x}=(\sqrt{x}\pm 1)^2. \tag{2}$$

Eszerint negatív x mellett y nem lenne valós, másrészt y egy (valós) kifejezés négyzete, tehát nem negatív. – (1) nem változik meg, ha x-et és y-t felcseréljük, ezért megállapításaink a (2)-nek megfelelő

$$x=y+1\pm 2\sqrt{y}=(\sqrt{y}\pm 1)^2 \tag{3}$$

eredményből is kiolvashatók, fordított sorrendben.

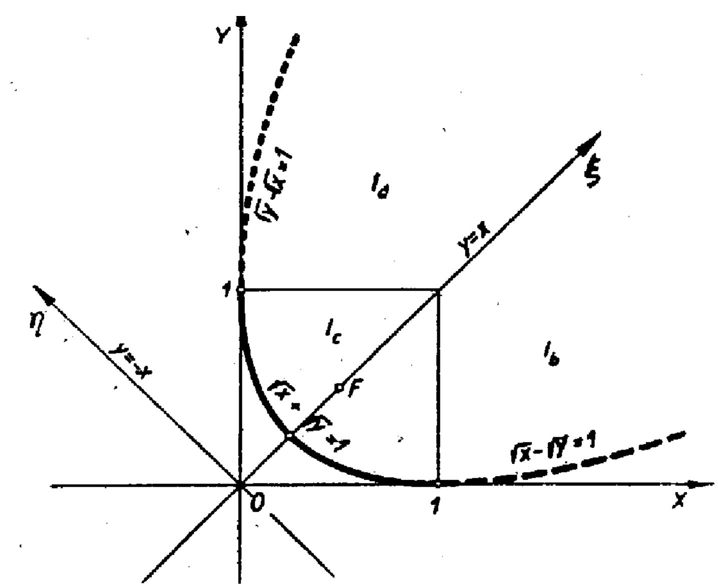
b) Az $y<x$ követelmény (2) első kifejezése szerint csak úgy teljesülhet, ha $2\sqrt{x}$ előtt mínusz jel áll:

$$y=x+1-2\sqrt{x}=(\sqrt{x}-1)^2. \tag{2'}$$

Így y pozitív négyzetgyöke

$$\sqrt{y}=\pm(\sqrt{x}-1), \tag{4}$$

ahol a $\pm$ előjelpárt ezúttal természetesen úgy értjük, hogy *vagy* $+$, *vagy* $-$; hogy melyik érvényes, azt $\sqrt{x}$ és 1 nagyságviszonya alapján kell eldönteni. Most $x>1$ folytán csak a $+$ jel lehet érvényes, ezért $\sqrt{y}=\sqrt{x}-1$, tehát $\sqrt{x}-\sqrt{y}=1$, az állításnak megfelelően.



c) (2) szerint $x\geq 0$ figyelembevételével az $y<1$ követelmény is csak $(2')$ mellett teljesülhet, (4) viszont $x<1$ és $\sqrt{x}<1$ folytán csak a zárójel előtti mínusz jellel, így $\sqrt{y}=-(\sqrt{x}-1)=1-\sqrt{x}$. Innen az állítás átrendezéssel adódik.

Az *a)* tény azt jelenti, hogy a derékszögű koordinátarendszerben az (1)-et kielégítő x, y értékpároknak megfelelő pontok halmaza (mint alább megmutatjuk, egy vonal, éspedig parabola) az I. síknegyedben helyezkedik el. Az I. negyedhez tartozónak tekintjük határát, a két tengely pozitív félegyenesét is, ugyanis (2)-ből $x=0$ mellett $y=1$ és (3)-ból $y=0$ mellett $x=1$, vagyis vonalunk egy-egy pontja e féltengelyeken van.

x és y-nak (1)-beli felcserélhetősége azt jelenti, hogy az x, y értékpároknak megfelelő pontok halmaza az $y=x$ egyenesre, az I. negyed szögfelezőjére nézve tükrös. Kézenfekvő a vonal egyenletét olyan derékszögű koordinátarendszerben felírni, melynek egyik (első) tengelye ez a felező, origója pedig azonos az eddigi origóval. Ekkor, mint ismeretes,[1] a régi koordináták helyére az új ξ, η koordináták

$$x=\frac{\xi-\eta}{\sqrt{2}}\qquad y=\frac{\xi+\eta}{\sqrt{2}}$$

kifejezései lépnek. Ezekkel $x-y=-\sqrt{2}\eta$, $x+y=\sqrt{2}\xi$, tehát (1) helyére

$$2\eta^2=2\sqrt{2}\xi-1,\qquad \eta^2=\sqrt{2}\left(\xi-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$$

[1] Lásd pl. Matematika, gimn. III. o. tankönyv, Hiperbola más helyzetben c. fejezet.

lép. Ez parabola egyenlete, csúcspontja az $(1/2\sqrt{2},\ 0)$ – a régi rendszerben $(1/4,\ 1/4)$ – pont, paraméterének fele $p/2=\sqrt{2}/4=1/2\sqrt{2}$, és így fókusza az $(1/\sqrt{2},\ 0)$ pont, irányvonala pedig a $\xi=0$ egyenes, az új ordinátatengely (a régi rendszerben az $(1/2,\ 1/2)$ pont, ill. az $y=-x$ egyenes).

A *b)* feltételek azt jelentik, hogy az eredeti koordinátarendszerben az I. síknegyednek csak a szögfelező és az X-tengely közti szögtartományát tekintjük és ebből is elhagyjuk az $x\le 1$ abszcisszájú, az $x=1$ egyenesen levő és attól az origó felé eső pontokat (az ábra I_b síkrésze).

Hasonlóan a *c)* feltételek csak az ábra I_c egységnyi oldalú négyzetének pontjait veszik figyelembe. Az új határvonal pontjai egyik esetben sem tartoznak hozzá a síkrészhez.

Mármost a *b)* alatti $\sqrt{x}-\sqrt{y}=1$ összefüggés a parabola I_b síkrészbeli ívének egyenlete, a *c)* alatti $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ pedig az I_c négyzetbe eső ívnek az egyenlete. Hasonlóan az I_d síkrészbeli ív egyenlete $\sqrt{y}-\sqrt{x}=1$.

Fekete Tamás (Budapest, Toldy F. g. IV. o. t.)

Megjegyzés. A számviszonyokra vonatkozó eredményeket abból is megkaphatjuk, hogy (1) mindkét oldalához $4x$-et (ill. $4y$-t) adva felismerjük, hogy a bal oldal teljes négyzet, tehát nem negatív:

$$(x-y)^2+2(x-y)+1=(x-y+1)^2=4x,$$
$$(x-y)^2-2(x-y)+1=(x-y-1)^2=4y,$$

majd 0-ra redukálással és szorzattá alakítással (az elsőből):

$$(x-y+1)^2-(2\sqrt{x})^2=(x-2\sqrt{x}+1-y)(x+2\sqrt{x}+1-y)=0,$$
$$\left[(\sqrt{x}-1)^2-y\right]\left[(\sqrt{x}+1)^2-y\right]=0,$$
$$(\sqrt{x}-1-\sqrt{y})(\sqrt{x}-1+\sqrt{y})(\sqrt{x}+1-\sqrt{y})(\sqrt{x}+1+\sqrt{y})=0,$$

$\sqrt{x}$-en, $\sqrt{y}$-on mindig a négyzetgyök abszolút értékét értve. Ez csak úgy teljesülhet, ha legalább egyik tényező 0. Az első zárójelbeli kifejezés csak úgy lehet 0, ha mind a $-\sqrt{y}$, mind a -1 tag elhagyásával visszamaradó rész nem negatív, ill. pozitív:

$$\begin{array}{ccc} \sqrt{x}-1\ge 0, & \text{ill. ha} & \sqrt{x}-\sqrt{y}>0,\ \text{amiből} \\ x\ge 1, & \text{ill.} & x>y \end{array}$$

(az $x=1$ esettől eltekintve a *b)* eset).

Hasonlóan a második zárójel csak $x\le 1$, $y\le 1$ mellett lehet 0 (vagyis az egyenlőségtől eltekintve a *c)* esetben), a harmadik zárójel (-1)-szerese csak $y>x$, $y\ge 1$ mellett, a negyedik zárójel pedig sehol, mert két tagja nem negatív és van pozitív tagja.

Zalán Péter (Aszód, Petőfi S. g. IV. o. t.)