

Egy mértani sorozat elemeit egy közös alap hatványaiként írva a kitevők számtani sorozatot alkotnak. Esetünkben közös alapnak 10 kínálkozik. Így a sorozat elemei:

$$10^{\lg x}, 10^{(\lg x)^2}, 10^{(\lg y)^2}, 10^{(\lg xy)^2}.$$

A szomszédos tagok kitevőinek a különbsége egyenlő:

$$(1) \quad (\lg x)^2 - \lg x = (\lg y)^2 - (\lg x)^2 = (\lg xy)^2 - (\lg y)^2.$$

Az első és utolsó különbség egyenlőségéből

$$(\lg x - 1) \lg x = (\lg xy - \lg y)(\lg xy + \lg y) = (\lg x) \cdot (\lg x + 2 \lg y).$$

A jobb oldalból levonva a bal, nyerjük, hogy

$$(\lg x)(1 + 2 \lg y) = 0,$$

tehát vagy $\lg x = 0$, vagy $\lg y = -1/2$.

I. Az első esetben az (1) alatti első két különbség egyenlőségéből

$$(\lg y)^2 = 0, \quad \lg y = 0.$$

Ekkor $x = y = 1$, és valóban a négy szám mindegyike 1.

II. Ha $\lg y = -1/2$, akkor ismét az (1) alatti első két különbség egyenlőségéből

$$2(\lg x)^2 - \lg x - \frac{1}{4} = 0,$$

$$\lg x = \frac{1 \pm \sqrt{1+2}}{4} = \begin{cases} \frac{1 + \sqrt{3}}{4}, \\ -\frac{\sqrt{3}-1}{4}. \end{cases}$$

A 2., 3. és 4. tag kitevőire adódó két-két érték sorra

$$(\lg x_1)^2 = \frac{2 + \sqrt{3}}{8},$$

$$(\lg y)^2 = \frac{1}{4}, \quad (\lg x_1 y)^2 = \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{4} \right)^2 = \frac{2 - \sqrt{3}}{8};$$

$$(\lg x_2)^2 = \frac{2 - \sqrt{3}}{8},$$

$$(\lg x_2 y)^2 = \left(-\frac{\sqrt{3}-1}{4} - \frac{1}{2} \right)^2 = \left(-\frac{\sqrt{3}+1}{4} \right)^2 = \frac{2 + \sqrt{3}}{8}.$$

Innen x -et és y -t kiszámítva

$$x_1 = 10^{\frac{1+\sqrt{3}}{4}} \approx 10^{0,6830} \approx 4,820; \quad x_2 = \frac{1}{10^{\frac{\sqrt{3}-1}{4}}} \approx 10^{0,8170-1} \approx 0,6561;$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{10}} \approx 0,3162.$$

A sorozat 4 elemére a következő értékek adódtak:

	$10^{\lg x}$	$10^{(\lg x)^2}$	$10^{(\lg y)^2}$	$10^{(\lg xy)^2}$
I	1	1	1	1
II ₁	4,820	$10^{\frac{2+\sqrt{3}}{8}} \approx 2,927$	$10^{\frac{1}{4}} \approx 1,778$	$10^{\frac{2-\sqrt{3}}{8}} \approx 1,080$
II ₂	0,6561	$10^{\frac{2-\sqrt{3}}{8}} \approx 1,080$	$10^{\frac{1}{4}} \approx 1,778$	$10^{\frac{2+\sqrt{3}}{8}} \approx 2,927$